ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

Copyright ಭಾಗ

ಕಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಮನೋಹರ



ಬ ಲಾಂಗಮನ್ಸ

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

ಲೇಖಕರು

ಪ್ರಾಂ. ಶ್ರೀ. ಕಟ್ಟಿ, ಎಮ್. ಎ. (ಕೇಂಬ್ರಿಜ್),

ಮಾಜೀ ಸೀನಿಅರ್ ಸ್ಕಾಲರ್, ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜ, ಕೇಂಬ್ರಿಜ್,
ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಎಲ್ಫಿನ್‌ಸ್ಟನ್ ಕಾಲೇಜ, ಮುಂಬಯಿ,
ಮತ್ತು ಮಾಜೀ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕಂಡರಿ ಟ್ರೇನಿಂಗ ಕಾಲೇಜ, ಬೆಳಗಾಂವಿ.

ಮತ್ತು

ವಾ. ಪ್ರಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ, ಎಮ್. ಎ. (ಲಂಡನ್),

ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕಂಡರಿ ಟ್ರೇನಿಂಗ ಕಾಲೇಜ, ಬೆಳಗಾಂವಿ,
ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಇಂಡಿಯನ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ ಆಫ್
ಎಜ್ಯುಕೇಶನ್, ಮುಂಬಯಿ.
ಮತ್ತು ಆ. ಗ. ಟೀಚರ್ಸ ಕಾಲೇಜ, ಅಹಮದಾಬಾದ.





ಓರಿಎಂಟ ಲಾಂಗಮನ್ಸ ಲಿಮಿಟೆಡ್

ಮುಂಬಯಿ ಕಲಕತ್ತಾ ಮದ್ರಾಸ

ಎಲ್ಲ ತರಹದ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಸುಲಭ, ಮಧ್ಯಮ ತರಗತಿಯ ಮತ್ತು ಗಡುಚಾದ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶಕ್ತಿಗನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಲು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಆಸ್ಪದವಿದೆ.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆದಷ್ಟು ಉಪಯೋಗಪ್ರದವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದೆ. ಪುಸ್ತಕದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕಮಿತ್ರರು ಕೆಲವು ವಿಧಾಯಕ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಆದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಆಭಾರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಲಾದೀತು. ಅದರಂತೆಯೇ ದೃಷ್ಟಿಪಥದೊಳಗಿಂದ ಜಾರಿದ ಮುದ್ರಣ ದೋಷಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಉತ್ತರಗಳೊಳಗಿನ ಉಳಿದು ಹೋದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನೂ ತೋರಿಸಿದರೆ ನಾವು ಬಹಳ ಆಭಾರಿಯಾಗುವೆವು. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪತ್ರವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ವಾ. ಪಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಕರ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು.

ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು

ಅನುಕೂಲ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು= Suitable grouping.

ಅನುಪಾತ= Section

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಗ್ರಹೀಕರಣ= Splitting up a fraction into partial fractions

ಅಕ್ಷ, ಸಮನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷ= Axis

ಆದೇಶ= Substitute

ಆದೇಶಿಸು, ಉತ್ಥಾಪಿಸು= To Substitute

ಆರಂಭಸ್ಥಾನ, ಪ್ರಸ್ಥಾನಬಿಂದು= Origin

ಏಕಕೋಟಿಕ= Of the first degree

ಕೋಟಿ, ಘಾತಪರಿಮಾಣ= Degree

ಕೋಟ್ಯಂತರ, ಕೋಟಿ= Ordinate

ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ= Factor theorem

ಚಕ್ರೀಯ= Cyclic

ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ= Cyclic order

ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿ= Cyclic expression

ಚರ= Variable

ಛೇದ= Intercept

ಬಿಂದು= Point of intersection

ಟಿಕ= Of the third

ದ್ವಿಕೋಟಿಕ= Of the second

ಪರತಂತ್ರ, ಪರಾಧೀನ ಚರ= Dependent variable

ಪರಂಪರಿತ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Continued fraction

ಪಾದ= Quadrant

ಪ್ರತಿನಿಧಿ= Substiute

ಪ್ರಭಾಗ ಜಾತಿ (ಮಿಶ್ರ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Complex fraction

ಫಲ= Function

ಬಿಂದು= Point

ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದು= To plot a point

ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕ= Mixed number

ಭುಜಾಂತರ, ಭುಜ= Abscissa

ಮಾನ, ಏಕಾಂಕ= Unit

ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ= Successive grouping

ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ= Conversion

ರೇಖಾಲೇಖ= Line graph

ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದ= Quadratic trinomial

ವಿಭಾಜಕ= Factor

ವಿಭಾಜ್ಯ= Multiple

ಶೇಷಸಿದ್ಧಾಂತ= Remainder theorem

ಸಮಕೋಟಿ, ಸಮಘಾತ= Homogenous

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ= Equiangular triangle
ಸಮಚ್ಛೇದ= Common Denominator
ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ, ಸಂಮಿತ= Symmetrical
ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯನ್ನು ಮಾಡುವದು= To Satisfy an equation
ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ= Coordinate
ಸಂಗತ= Corresponding
ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ= Column graph
ಸ್ಥಿರಪದ= Constnt term
ಸ್ವತಂತ್ರ (ಸ್ವಾಧೀನ) ಚರ= Independent variable
ಕ್ಷಿತಿಜಲಂಬ= Vertical
ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ= Horizontal

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ತಿದ್ದುಪಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಬಿನ್ನಹ.

ಪುಟ	ಉದಾಹರಣೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಾಲು		ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
	ಉ.	೬	ಬ = ೧ಮ = ೩	ಬ = —೧,ಮ
೨೩	ಸಾ.	೧೯	೬೦೦—೧೨	೬೦೦—೧೩
೨೪	ಉ.	೧೧	೨ರ೨	ರ೨
೩೦	ಉ.	೧೨	—(ಸ—೪ಮ)೩	(೪ಸ—ಮ)೩
	ಉ.	೧೩	(ಯ+ರ—ಸ)೩	(ಯ—ರ—ಸ)೩
೩೮	ಉ.	೮	ಪಮ	ಪ೨ಮ೨
	ಉ.	೧೮	ಮ	ಮ೪
೪೧	ಉ.	೪	೯	೯೦
೬೫	ಉ.	೧೯	+೬	—೬
೭೫	ಉ.	೩	ತ(ದ—ಸ೨)	ತ(ದ೨—ಸ೨)
೮೭	ಉ.	೨	೨೦	೩೦
	ಉ.	೪	೧೯ಯ	೫೮ಯ
೧೨೩	ಉ.	೨೨	೩೨ಮ೨	ಪ೨ಪ೨
	ಉ.	೨೩	೫೮÷೨	೫೮—೨
೧೨೭	ಉ.	೧೪	$+೪ಯ^{೨}+೧$	$-೪ಯ^{೩}+೧$
೧೪೨	ಉ.	೧೮	$-\frac{೧}{ಮ೨}$	$-\frac{೧}{ಮ}$

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

೩. $(ಪ+ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}$

$\equiv ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}+೪ಪಮ$

$\equiv (ಪ-ಮ)^{೨}+೪ಪಮ$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕ್ಮಡಿ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

೪. $(ಪ-ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}$

$\equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}-೪ಪಮ$

$\equiv (ಪ+ಮ)^{೨}-೪ಪಮ$

ಅಂದರೆಯೇ, ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ = ಆ ಪದಗಳ ಜೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕ್ಮಡಿ.

೫. $(ಪ+ಮ)^{೨}+(ಪ-ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}+ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨} \equiv ೨ಪ^{೨}+೨ಮ^{೨}$

$\therefore (ಪ^{೨}+ಮ^{೨}) \equiv \frac{೧}{೨}\{(ಪ+ಮ)^{೨}+(ಪ-ಮ)^{೨}\}$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಜೇರೀಜು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಜೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

೬. $(ಪ+ಮ)^{೨}-(ಪ-ಮ)^{೨} \equiv (ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨})-(ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨})$

$\equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}-ಪ^{೨}+೨ಪಮ-ಮ^{೨}$

$\equiv ೪ಪಮ.$

$\therefore ಪಮ \equiv \frac{೧}{೪}\{(ಪ+ಮ)^{೨}-(ಪ-ಮ)^{೨}\}$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇದರ ಒಂದು ನಾಲ್ಕಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ.

೧·೨. ಮೇಲಿನ **ನಿತ್ಯಸಮ**ಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉ ೧. $\text{ಪ} + \text{ಮ} = ೭$ ಮತ್ತು $\text{ಪಮ} = ೧೨$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಪ}^{೨} + \text{ಮ}^{೨} = ?$

$$\text{ಪ}^{೨} + \text{ಮ}^{೨} = (\text{ಪ} + \text{ಮ})^{೨} - ೨\,\text{ಪಮ} \qquad (೧)$$
$$= (೭)^{೨} - ೨.\,೧೨$$
$$= ೪೯ - ೨೪$$
$$= \mathbf{೨೫}.$$

ಉ. ೨. $\text{ನ} - \text{ಮ} = ೪$, ಮತ್ತು $\text{ನಮ} = ೫$ ಇದ್ದರೆ $\text{ನ}^{೨} + \text{ಮ}^{೨} = ?$

$$\text{ನ}^{೨} + \text{ಮ}^{೨} = (\text{ನ} - \text{ಮ})^{೨} + ೨\,\text{ನಮ} \qquad (೨)$$
$$= ೪^{೨} + ೨.\,೫$$
$$= ೧೬ + ೧೦$$
$$= \mathbf{೨೬}.$$

ಉ. ೩. $\text{ಯ} - \frac{೧}{\text{ಯ}} = ೫$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಯ}^{೨} + \frac{೧}{\text{ಯ}^{೨}} = ೨೭$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$\text{ಯ}^{೨} + \frac{೧}{\text{ಯ}^{೨}} = \left(\text{ಯ} - \frac{೧}{\text{ಯ}}\right)^{೨} + ೨\cdot\text{ಯ}\cdot\frac{೧}{\text{ಯ}} \qquad (೨)$$
$$= (೫)^{೨} + ೨$$
$$= \mathbf{೨೭}.$$

ಉ. ೪. $\text{ನ} + \frac{೧}{\text{ನ}} = ೭$, ಇದ್ದರೆ $\text{ನ}^{೨} + \frac{೧}{\text{ನ}^{೨}} = ?$

$$\text{ನ}^{೨} + \frac{೧}{\text{ನ}^{೨}} = \left(\text{ನ} + \frac{೧}{\text{ನ}}\right)^{೨} - ೨\text{ನ}.\frac{೧}{\text{ನ}} \qquad (೧)$$
$$= (೭)^{೨} - ೨$$
$$= \mathbf{೪೭}.$$

ಉ. ೫. ಕ−ಗ=೩ ಮತ್ತು ಕಗ=೨೮ ಇದ್ದರೆ (ಕ+ಗ)^2 = ?

(ಕ+ಗ)^2 = (ಕ−ಗ)^2 + ೪ ಕಗ (೩)

= ೩^2 + ೪.೨೮

= ೯ + ೧೧೨

= ೧೨೧.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.

ಉ. ೧. ಪ+ಮ=೭

ವರ್ಗ ಮಾಡಿ ಪ^2 + ೨ಪಮ + ಮ^2 = ೪೯

∴ ಪ^2 + ಮ^2 + ೨೪ = ೪೯ [∵ ಪಮ = ೧೨

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ಪ^2 + ಮ^2 = ೪೯ − ೨೪ = **೨೫.**

ಇದೇ ರೀತಿಯಿಂದ ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೬. ಯ = ೫ ಮತ್ತು ರ = ೩ ಇದ್ದರೆ ೨೫ಯ^2 − ೭೦ಯರ + ೪೯ರ^2 = ?

೨೫ಯ^2 − ೭೦ಯರ + ೪೯ರ^2 = (೫ಯ)^2 − ೨.೫ಯ.೭ರ + (೭ರ)^2

= (೫ಯ − ೭ರ)^2

= (೫ × ೫ − ೭ × ೩)^2

= (೨೫ − ೨೧)^2

= (೪)^2

= ೧೬.

ಉ. ೭. (ಪ+ಬ−ಮ)^2 + ೨ (ಪ+ಬ−ಮ) (ಪ−ಬ+ಮ) + (ಪ−ಬ+ಮ)^2 ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.

(ಪ+ಬ−ಮ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು **ಯ** ದಿಂದ ಮತ್ತು (ಪ−ಬ+ಮ) ದ **ರ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು = ಯ^{೨} + ೨ ಯರ + ರ^{೨} *

= (ಯ + ರ)^{೨} *

= {(ಪ + ಬ − ಮ) + (ಪ − ಬ + ಮ)}^{೨}

= (೨ಪ)^{೨}

= ೪ಪ^{೨}.

ಉ. ೪. (ಕಪ − ಗಬ − ಘಮ)^{೨} + (ಕಪ + ಗಬ − ಘಮ)^{೨}

− ೨ (ಕಪ − ಗಬ − ಘಮ)(ಕಪ + ಗಬ − ಘಮ)

ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

(ಕಪ − ಗಬ − ಘಮ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯ ದಿಂದ ಮತ್ತು (ಕಪ + ಗಬ − ಘಮ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ರ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು = ಯ^{೨} + ರ^{೨} − ೨ಯರ *

= (ಯ − ರ)^{೨} *

= {(ಕಪ − ಗಬ − ಘಮ) − (ಕಪ + ಗಬ − ಘಮ)}^{೨}

= (−೨ಗಬ)^{೨}

= ೪ಗ^{೨}ಬ^{೨}.

* ಯ, ರ, ಈ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಡಬಹುದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. (೩ತ + ಸ)^{೨} − ೨(೩ತ + ಸ)(೩ತ − ಸ) + (೩ತ − ಸ)^{೨}.

೨. (೫ಯ − ೭ರ)^{೨} + ೨(೫ಯ − ೭ರ)(೭ರ + ೩ಯ) + (೭ರ + ೩ಯ)^{೨}.

೩. (೫ಪ − ೪ಮ)^{೨} + ೨(೫ಪ − ೪ಮ)(೪ಮ − ೩ಪ) + (೪ಮ − ೩ಪ)^{೨}.

೪. (೯ಕ + ೫ಗ)^{೨} − ೨(೯ಕ + ೫ಗ)(೫ಗ + ೪ಘ) + (೫ಗ + ೪ಘ)^{೨}.

೫. (೨ಕ—೩ಗ+೫ಘ)^{೨}+೨(೨ಕ—೩ಗ+೫ಘ)
(೩ಗ—೫ಘ+೭ಕ) + (೩ಗ—೫ಘ+೭ಕ)^{೨}.

೬. ಪ=೨, ಬ=೧, ಮ=೩ ಇದ್ದರೆ ೪ಪ^{೨}ಬ^{೨}+೧೨ಪಬಮ+೯ಮ^{೨}=?

೭. ಅ=೧, ಕ= −೨, ಗ=೩ ಇದ್ದರೆ ೧೬ಅ^{೨}−೪೦ಅಕಗ+೨೫ಕ^{೨}ಗ^{೨}=?

೮. ಅ=೨, ಕ= −೩, ಗ=೪ ಇದ್ದರೆ (೨ಅ−ಕ+೨ಗ)^{೨}
−೨ (೨ಅ−ಕ+೨ಗ) (ಅ−೨ಕ−೨ಗ)+(ಅ−೨ಕ−೨ಗ)^{೨}=?

೯. ಅ+ಕ=೧೦, ಮತ್ತು ಅಕ= −೩ ಇದ್ದರೆ ಅ^{೨}+ಕ^{೨}=?

೧೦. ತ−ನ= −೩ ಮತ್ತು ತನ= −೪ ಇದ್ದರೆ ತ^{೨}+ನ^{೨}=?

೧೧. ಪ+ಮ= ೬ ಮತ್ತು ಪಮ= ೮ ಇದ್ದರೆ (ಪ—ಮ)^{೨}=?

೧೨. ಯ−ರ=೧೦ ಮತ್ತು ಯರ= −೧೬ ಇದ್ದರೆ (ಯ+ರ)^{೨}=?

ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:

೧೩. ಅ+$\frac{೧}{ಅ}$= −೫ ಇದ್ದರೆ ಅ^{೨}+$\frac{೧}{ಅ^{೨}}$=೨೩.

೧೪. ಕ−$\frac{೧}{ಕ}$= −೪ ಇದ್ದರೆ ಕ^{೨}+$\frac{೧}{ಕ^{೨}}$=೧೮.

೧೫. ಯ+$\frac{೧}{ಯ}$=ಅ ಇದ್ದರೆ ಯ^{೨}+$\frac{೧}{ಯ^{೨}}$=ಅ^{೨}−೨.

೧೬. ಯ−$\frac{೧}{ಯ}$=ಕ ಇದ್ದರೆ ಯ^{೨}+$\frac{೧}{ಯ^{೨}}$=ಕ^{೨}+೨.

೧೭. ಬ+$\frac{೧}{ಬ}$= −೭ ಇದ್ದರೆ ಬ^{೨}+$\frac{೧}{ಬ^{೨}}$=?

೧೮. ಸ−$\frac{೧}{ಸ}$=೮ ಇದ್ದರೆ ಸ^{೨}+$\frac{೧}{ಸ^{೨}}$=?

೧೯. ಪ+$\frac{೧}{ಪ}$=೪ ಇದ್ದರೆ (ಪ−$\frac{೧}{ಪ}$)^{೨}=?

೨೦. ನ−$\frac{೧}{ನ}$= −೨ ಇದ್ದರೆ (ನ+$\frac{೧}{ನ}$)^{೨}=?

ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರದ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯದನ್ನು ಬರೆದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವದು.

೧·೩. ಈಗ ನಾವು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರದೊಳಗಿನ ಮೂರೂ ಪದಗಳ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಇರುವ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ತರಹದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$(\text{ಪ}+\text{ಮ})^2 = \text{ಪ}^2 + \text{೨ಪಮ} + \text{ಮ}^2 \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$(\text{ಪ}-\text{ಮ})^2 = \text{ಪ}^2 - \text{೨ಪಮ} + \text{ಮ}^2$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರದೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುತ್ತದೆ. **ನಡುವಿನ ಪದ = ೨ × ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.** ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವದು. ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಜೋಡು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. **ಪ**^{2} + **ಮ**^{2} ದಲ್ಲಿ **ಪ**^{2} ಮತ್ತು **ಮ**^{2} ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ (**ಪ** ಮತ್ತು **ಮ** ಗಳ) ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು (**೨ಪಮ**) ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಮಾತು ವಿಶೇಷ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಮೊದಲನೆಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ **ಪ**^{2} ಮತ್ತು **ಮ**^{2} ಇವುಗಳಲ್ಲಿ **೨ಪಮ** ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪ+**ಮ** ದ ವರ್ಗ

ಆಕೃತಿ ೧

ಆಕೃತಿ ೨

ವಾಗುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಆಕೃತಿಯಿಂದ **ಪ**^{೨} + **ಮ**^{೨} ದೊಳಗಿಂದ **೨ಪಮ** ವನ್ನು ಕಳೆದರೆಯುಳಿವ ವಸ್ತು **ಪ ಮ** ದ ವರ್ಗವಿರುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. **ಕಖಗಘ** ಮತ್ತು **ತಗಚಜ** ಈ ಚೌರಸಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿಂದ **ಕಖನದ** ಮತ್ತು **ಘನಚಜ** ಈ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ **ದಘತಘ** ಈ ಚೌರಸವು ಉಳಿಯುವದು.

ಮೇಲಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟ ಇರುವದು. ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನೊಳಗಿಂದ ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೧೦೦ಅ^{೨} + ೧೨೧ಕ^{೨} ಇದರಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ೧೦ಅ ಮತ್ತು ೧೧ಕ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ೨೨೦ಅಕ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ರಾಶಿಗಳು ೧೦೦ಅ^{೨}+೨೨೦ಅಕ+೧೨೧ಕ^{೨} ಮತ್ತು ೧೦೦ಅ^{೨}—೨೨೦ಅಕ+೧೨೧ಕ^{೨} ಇವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿರುವವು.

ಮೊದಲನೆಯದು ೧೦ಅ+೧೧ಕ ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ೧೦ಅ—೧೧ಕ ದ್ದು ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

೧೦೦ಅ^{೨} .... + ೧೨೧ಕ^{೨}
= (೧೦ಅ)^{೨} .... + (೧೧ಕ)^{೨}
= (೧೦ಅ)^{೨} ±
೨. ೧೦ಅ. ೧೧ಕ. + (೧೧ಕ)^{೨}
= (೧೦ಅ ± ೧೧ಕ)^{೨}

೧·೪. ಅದರಂತೆಯೇ ನಡುವಿನ ಪದವು= ೨× ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ× ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ× ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ=ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ.

∴ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು = ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ÷ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.

∴ ಕೊನೆಯ ಪದವು = (ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ÷ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ)^2.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ಪದಗಳ ಪೈಕಿ ಇಲ್ಲವೆ ಪದಾವಳಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಪದದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರದೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಪದ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಪದವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ನಮಗೆ ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೪ಅ^2 + ೧೨ಅಕ ಇದರಲ್ಲಿ ೧೨ಅಕ ದ ಅರ್ಧ ೬ಅಕ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೨ಅ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೩ಕ. ಇದರ ವರ್ಗ ೯ಕ^2 ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ೧೬ಅ^2 − ೪೦ಅಕ ಇದರಲ್ಲಿ ೪೦ಅಕ ದ ಅರ್ಧ ೨೦ಅಕ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೪ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೫ಕ, ಇದರ ವರ್ಗ ೨೫ಕ^2 ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು.

೪ಅ^2 + ೧೨ಅಕ + ...
=(೨ಅ)^2 + ೨.೨ಅ.೩ಕ + ..
=(೨ಅ)^2 + ೨.೨ಅ.೩ಕ + (೩ಕ)^2
=(೨ಅ + ೩ಕ)^2

೧೬ಅ^2 − ೪೦ಅಕ + ...
=(೪ಅ)^2 − ೨.೪ಅ.೫ಕ + ...
=(೪ಅ)^2 − ೨.೪ಅ.೫ಕ + (೫ಕ)^2
=(೪ಅ − ೫ಕ)^2

ಮೊದಲನೆಯದು ೨ಅ + ೩ಕ ಇದರ ವರ್ಗವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ೪ಅ − ೫ಕ ಇದರ ವರ್ಗವಿದ್ದೀತು.

ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಪಡೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ .... + ೬೦ಅಕ + ೨೫ಕ^2

ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ೪೨ಅಕ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೭ಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೬ಅ, ಇದರ ವರ್ಗ ೩೬ಅ^{೨} ಇದು ಮೊದಲನೇ ಪದವಿದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ೩೬ಅ^{೨}+೮೪ಅಕ+೪೯ಕ^{೨} ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು....

–೧೪೪ ಅಕ+೮೧ಕ^{೨} ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ೭೨ಅಕ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ೯ಕ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೮ಅ, ಇದರ ವರ್ಗ ೬೪ಅ^{೨} ಇದು ಮೊದಲನೇಯ ಪದವು ಇದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ೬೪ಅ^{೨}–೧೪೪ಅಕ+೮೧ಕ^{೨} ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಇಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು.

... ೮೪ಅಕ+೪೯ಕ^{೨}
= ...+೨·೬ಅ.೭ಕ+(೭ಕ)^{೨}
=(೬ಅ)^{೨}+೨.೬ಅ.೭ಕ+(೭ಕ)^{೨}
=(೬ಅ+೭ಕ)^{೨}

... —೧೪೪ಅಕ+೮೧ಕ^{೨}
=...–೨·೮ಅ.೯ಕ+(೯ಕ)^{೨}
= (೮ಅ)^{೨}· ೨·೮ಅ·೯ಕ+(೯ಕ)^{೨}
= (೮ಅ—೯ಕ)^{೨}

ಉ. ೧. ೩೬ ಯ^{೨}—೬೦ಯರ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೩೬ ಯ^{೨} = (೬ಯ)^{೨}, ಮತ್ತು ೬೦ಯರ = ೨.೬ಯ.೫ರ.

∴ (೫ರ)^{೨}, ಅಂ. ೨೫ರ^{೨} ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು.

೩೬ಯ^{೨}—೬೦ಯರ+೨೫ರ^{೨} ಇದು ೬ಯ—೫ರ ದ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. ೪ಯ^{೨}+೪೯ವ^{೨} ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೪ಯ^{೨}=(೨ಯ)^{೨}, ಮತ್ತು ೪೯ವ^{೨} = (೭ವ)^{೨}

∴ ೨·೨ಯ·೭ವ, ಅಂ· ೨೮ಯವ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ-ವಾಗುವದು ?

೪ಯ^{೨}+೨೮ಯವ+೪೯ವ^{೨} ಇದು ೨ಯ+೭ವ ದ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೩. ೧೨೧ನ² + ೬೪ಮ² ಇದರೊಳಗಿಂದ ಏನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು? ೧೨೧ನ² = (೧೧ನ)² ಮತ್ತು ೬೪ಮ² = (೮ಮ)².
∴ ೨·೧೧ನ·೮ಮ, ಅಂ. ೧೭೬ನಮ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವುದು.
೧೨೧ನ² − ೧೭೬ನಮ + ೬೪ಮ² ಇದು ೧೧ನ − ೮ಮ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಉ. ೪. ೪೯ಯ² + ೫೬ಯ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.

೪೯ಯ² = (೭ಯ)², ಮತ್ತು ೫೬ಯ = ೨.೭ಯ.೪.
∴ (೪)², ಅಂ. ೧೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.
೪೯ಯ² + ೫೬ಯ + ೧೬ ಇದು ೭ಯ + ೪ ದ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೫. ೨೫ಯ² ೬೦ಕಯ + ೨೭ಕ² ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಕ² ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿರುವದು?
೨೫ಯ² = (೫ಯ)², ಮತ್ತು ೬೦ಕಯ = ೨.೬ಕ.೫ಯ.
∴ ೨೫ಯ² − ೬೦ಕಯ ದ ಜೊತೆಗೆ (೬ಕ)², ಅಂ, ೩೬ಕ² ಇದ್ದರೆ ಅದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಮೂಲರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೯ಕ² ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದು.
೨೫ಯ² — ೬೦ಕಯ + ೩೬ಕ² ಇದು ೫ಯ − ೬ಕ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨.

[ಇದರಲ್ಲಿಯು ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.]

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಗೆ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಾಗುವದ ಇದನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವ ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ೧೦೦ರ² + ೬೦ರ.
೨. ೧೪೪ಸ² − ೧೬೮ಸ.
೩. ೧೬೯ವ² — ೧೦೪ವ.
೪. ೧೯೬ತ² − ೮೪ತ.
೫. ೪ಕ್ಷ² + ೨೦ಕ್ಷ + ೨೧.
೬. ೯ಕ್ಷ² − ೧೨ಕ್ಷ − ೫.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದು. ಅವದಲ್ಲಿ ಕೂಡದೇ ಇದ್ದ ಪದವನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. .... + ೩೦ಪಮ + ೨೫ಮ².
೮. .... + ೭೨ಪಮ + ೮೧ಮ².
೯. ೪೯ಮ² + ... + ೧೦೦ರ².
೧೦. ೬೪ಮ² + ... + ೯ಕ್ಷ².
೧೧. ೮೧ಮ⁴ + ... + ೪ರ⁴.
೧೨. ೪೯ — .... + ೬೪ಕ².
೧೩. ೪೯ಮ² — .... + ೯೦೦.
೧೪. ೪ಪ²ಕ² — .... + ೯ಕ್ಷ².
೧೫. ೧೬ಪ²ಕ² — .... + ೨೫ಗ² ಘ².
೧೬. ೮೧ — .... + ೪೯ಪ²ಕ² ಗ².
೧೭. ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ೨೫ರ² + ೧೮ರ + ೪ ಮತ್ತು ೧೬ಮ²—೨೬ಮ+೯ ಈ ರಾಶಿಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾಗುವವು, ಆ ನಂತರ ಅವು ಯಾವುಗಳ ವರ್ಗಗಳಾಗುವವು ?
೧೮. ನಡುವಿನ ಪದದೊಳಗಿಂದ ಯಾವುದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ೯ಮ⁴ + ೨೧ಮ²ರ² + ೪ರ⁴ ಈ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವಾಗುವದು, ಆ ನಂತರ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

೨.

(ಪ + ಬ + ಮ)² = ಪ² + ಬ² + ಮ² + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ

೧೫. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಭಾ.೩.ಪೃ.೭೭, ೭೮) ಪ+ಬ+ಮ ದಂತಹ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ+ಬ+ಮ ವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಪ+ಬ+ಮ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ **ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವರ್ಗವು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಮೂರೂ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು** ಇರುತ್ತದೆಂದು ಅಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಪ+ಬ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

$(ಪ+ಬ+ಮ)^೨ = (ಅ+ಮ)^೨$

$= ಅ^೨ + ೨ಅಮ + ಮ^೨$

$= (ಪ+ಬ)^೨ + ೨ಮ(ಪ+ಬ) + ಮ^೨$

[ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮೂಲ ಪ+ಬ ಬರೆದು]

$= ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ಬ^೨ + ೨ಪಮ + ೨ಬಮ + ಮ^೨$

$= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ$

ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿ ಮೇಲಿಂದಲೂ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ವಿಸ್ತಾರ-ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಹಿಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದೆ. ಇಂದು ನಾವು ಅವುಗಳ ಉಜಳಣೆ-ಯನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಪ	ಬ	ಮ	
$ಪ^೨$	ಪಬ	ಪಮ	ಪ
ಪಬ	$ಬ^೨$	ಬಮ	
ಪಮ	ಬಮ	$ಮ^೨$	ಮ

ಆಕೃತಿ ೩.

ಉ. ೧. $(ಪ-ಬ-ಮ)^೨ = ಪ^೨ + (-ಬ)^೨ + (-ಮ)^೨ + ೨ಪ(-ಬ) + ೨ಪ(-ಮ) + ೨(-ಬ)(-ಮ)$
$= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೨ಪಬ + ೨ಬಮ - ೨ಮಪ.$

ಉ. ೨. $(೫ಕ-೨ಗ+೬ಘ)^೨ = (೫ಕ)^೨ + (-೨ಗ)^೨ + (೬ಘ)^೨ + ೨.೫ಕ(-೨ಗ) + ೨.೫ಕ.೬ಘ +$

೨(—೨ಗ).೬ಘ

=೨೫ಕ^{೨} + ೪ಗ^{೨} + ೩೬ಘ^{೨} − ೨೦ಕಗ + ೬೦ಕಘ − ೨೪ಗಘ.

ಉ. ೩. (೮ಪ − $\frac{೧}{೨}$ಬ − $\frac{೩}{೪}$ಮ)^{೨}

= (೮ಪ)^{೨} + (− $\frac{೧}{೨}$ಬ)^{೨} + (− $\frac{೩}{೪}$ಮ)^{೨} + ೨·೮ಪ

(− $\frac{೧}{೨}$ಬ) + ೨·೮ಪ(— $\frac{೩}{೪}$ಮ) + ೨ (— $\frac{೧}{೨}$ಬ) (— $\frac{೩}{೪}$ಮ)

= ೬೪ಪ^{೨} + $\frac{೧}{೪}$ಬ^{೨} + $\frac{೯}{೧೬}$ಮ^{೨} − ೮ಪಬ − ೧೨ಪಮ + $\frac{೩}{೪}$ಬಮ

ಉ. ೪. (೩ಯ^{೩} + ರ^{೨} — ೫ಲ)^{೨} = (೩ಯ^{೩})^{೨} + (ರ^{೨})^{೨} +

(− ೫ಲ)^{೨} + ೨·೩ಯ^{೩}. ರ^{೨} + ೨·೩ಯ^{೩} (—೫ಲ) +

೨ರ^{೨}(—೫ಲ)

= ೪ಯ^{೬} + ರ^{೪} + ೨೫ಲ^{೨} + ೪ಯ^{೩}ರ^{೨}—

೩೦ಯ^{೩}ಲ—೧೦ರ^{೨}ಲ.

ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯು ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಡುವಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೫. ಯ=೩, ರ=೨, ಲ=೫ ಇದ್ದರೆ ೯ಯ^{೨} + ೪೯ರ^{೨} + ೪ಲ^{೨}

− ೪೨ಯರ − ೨೮ರಲ + ೧೨ಲಯ = ?

೯ಯ^{೨} + ೪೯ರ^{೨} + ೪ಲ^{೪} − ೪೨ಯರ − ೨೦ರಲ + ೧೨ಲಯ

=(೩ಯ)^{೨} + (—೭ರ)^{೨} + (೨ಲ)^{೨} + ೨·೩ಯ (—೭ರ)

+ ೨·೨ಲ (—೭ರ) + ೨·೨ಲ·೩ಯ

=(೩ಯ—೭ರ + ೨ಲ)^{೨}

= (೯—೧೪ + ೧೦)^{೨}

= (೫)^{೨}

= ೨೫.

ಉ. ೬. $(ಅ+ಬ)^೪$ ರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

$$(ಅ+ಬ)^೪ = \{(ಅ+ಬ)^೨\}^೨$$
$$= (ಅ^೨+೨ಅಬ+ಬ^೨)^೨$$
$$= (ಅ^೨)^೨ + (೨ಅಬ)^೨ + (ಬ^೨)^೨ + ೨ಅ^೨\cdot ೨ಅಬ + ೨ಅ^೨ಬ^೨ + ೨\cdot ೨ಅಬ\cdot ಬ^೨$$
$$= ಅ^೪ + ೪ಅ^೨ಬ^೨ + ಬ^೪ + ೪ಅ^೩ಬ + ೨ಅ^೨ಬ^೨ + ೪ಅಬ^೩$$
$$= ಅ^೪ + ೪ಅ^೩ಬ + ೬ಅ^೨ಬ^೨ + ೪ಅಬ^೩ + ಬ^೪.$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩.

(ಮೊದಲಿನ ಬಗೆಗಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.)

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧. $೬ತ-ದ-೩$.

೨. $ಯ-೪ರ+೩ಲ$.

೩. $೮ಯ+೩ರ+೨ಲ$.

೪. $೫ಕ-೨ಗ+೫ಫ$.

೫. $೪ಅ-೨ಬ-೫$.

೬. $೨ಯ-೩ರ+೭ಲ$.

೭. $೪ಕ+೭ಗ-೬ಫ$.

೮. $೯ತ-೧೦ದ-೭ನ$.

೯. $೫ಕ^೨-೩ಗ-ಫ^೨$.

೧೦. $ಕ^೨-೨ಕಗ+೩ಗ^೨$.

೧೧. $ಯ^೪-೨ಯ^೨-೫ಯ$.

೧೨. $೭ಯ^೨-೬ಯರ+೭ರ^೨$.

೧೩. $೫ತ^೨-೬ತ-೭$.

೧೪. $೩ಅ-೫-\frac{೧}{೩ಅ}$.

೧೫. $\frac{೨}{ಕ}-\frac{೩}{ಗ}-\frac{೫}{ಫ}$.

೧೬. $\frac{೫}{ಯರ}-\frac{೨}{ರಲ}+\frac{೭}{ಲಯ}$.

೧೭. $\frac{ತ}{ದ}+\frac{ದ}{ನ}-\frac{ನ}{ತ}$.

೧೮. $\frac{೪ತ}{೫ದ}-\frac{೧೦ದ}{೩ನ}-\frac{೯ನ}{೨ತ}$.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ

೧೯. $೯ಅ^೨+೪ಬ^೨+೪೯ಮ^೨-೧೨ಅಬ-೨೮ಬಮ+೪೨ಅಮ$.

೨೦. $೪ಕ^೪+೧೬ಕ^೩+೪ಕ^೨-೨೪ಕ+೯$.

೨೧. $೧೬ಯ^೪-೨೪ಯ^೩ರ+೪೯ಯ^೨ರ^೨-೩೦ಯರ^೩+೨೫ರ^೪$.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

೩೧. (೩ಯ .... + ೫ಲ)^{೨} = ... —೧೨ಯರ ....

೩೨. (.... —೭ರ....)^{೨} = ... —೪೨ಯರ .... — ೬೮ಯ.

೩೩. (೫ಪ ....)^{೨} = ... +೧೨ಬಮ ೨೦ಮಪ.

೩೪. (.... —೪ಗ....)^{೨} = ... —೨೪ಕಗ .... + ೫೪ಕ ....

೩೫. ಯ=೫, ರ=೩, ಲ=—೧ ಇದ್ದರೆ ಯ^{೨} + ೪ರ^{೨} + ಲ^{೨} —೪ಯರ —೪ರಲ + ೨ಲಯ = ?

೩೬. ಪ=೩, ಬ=$\frac{೨}{೩}$, ಮ=೧$\frac{೧}{೩}$ ಇದ್ದರೆ ೪ಪ^{೨} + ೮೧ಬ^{೨} + ೧೬ಮ^{೨} —೩೬ಪಬ + ೭೨ಬಮ —೧೬ಮಪ = ?

೩೭. ತ=$\frac{೧}{೩}$ ಇದ್ದರೆ ತ^{೨}—೪ತ + ೬ —$\frac{೪}{ತ}$ + $\frac{೧}{ತ^{೨}}$ = ?

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೩೮. (ತ—೩ ವ)^{೪}, ೩೯. (೫ಸ + ೨ ಮ)^{೪}.

೪೦. (ಯ — $\frac{೧}{ಯ}$)^{೪}.

೧·೬. ∵ (ಪ + ಬ + ಮ)^{೨}

≡ ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ

≡ ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} + ೨ (ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)

∴ **ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} ≡ (ಪ + ಬ + ಮ)^{೨}**

— ೨(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ) ಮತ್ತು ೨(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)

≡ (ಪ + ಬ + ಮ)^{೨} — (ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨})^{೨} ಆಗುವದರಿಂದ

ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ

≡ $\frac{೧}{೨}${(ಪ + ಬ + ಮ)^{೨} — (ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨})}

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\text{ಯ}+\text{ರ}+\text{ಲ}=\text{೫}$, ಮತ್ತು $\text{ಯರ}+\text{ರಲ}+\text{ಲಯ}=\text{೮}$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ರ}^{\text{೨}}+\text{ಲ}^{\text{೨}}=?$

$$\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ರ}^{\text{೨}}+\text{ಲ}^{\text{೨}}=(\text{ಯ}+\text{ರ}+\text{ಲ})^{\text{೨}}-\text{೨}(\text{ಯರ}+\text{ರಲ}+\text{ಲಯ})$$
$$=(\text{೫})^{\text{೨}}-\text{೨}\cdot\text{೮}$$
$$=\text{೨೫}-\text{೧೬}$$
$$=\text{೯}.$$

ಉ. ೨. $\text{ಕ}+\text{ಗ}+\text{ಘ}=\text{೬}$ ಮತ್ತು $\text{ಕ}^{\text{೨}}+\text{ಗ}^{\text{೨}}+\text{ಘ}^{\text{೨}}=\text{೩೮}$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಕಗ}+\text{ಗಘ}+\text{ಘಕ}=?$

$$\text{ಕಗ}+\text{ಗಘ}+\text{ಘಕ}$$
$$=\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}\{(\text{ಕ}+\text{ಗ}+\text{ಘ})^{\text{೨}}-(\text{ಕ}^{\text{೨}}+\text{ಗ}^{\text{೨}}+\text{ಘ}^{\text{೨}})\}$$
$$=\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}(\text{೩೬}-\text{೩೮})$$
$$=\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}(-\text{೨})$$
$$=-\text{೧}.$$

ಉ. ೩. $(\text{ಯ}-\text{ರ})^{\text{೨}}+(\text{ರ}-\text{ವ})^{\text{೨}}+(\text{ವ}-\text{ಯ})^{\text{೨}}+\text{೨}(\text{ಯ}-\text{ರ})(\text{ರ}-\text{ವ})+\text{೨}(\text{ರ}-\text{ವ})(\text{ವ}-\text{ಯ})+\text{೨}(\text{ವ}-\text{ಯ})(\text{ಯ}-\text{ರ})$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$\text{ಯ}-\text{ರ}$, $\text{ರ}-\text{ವ}$, ಮತ್ತು $\text{ವ}-\text{ಯ}$ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ, ಬ** ಮತ್ತು **ಮ** ಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು

$$=\text{ಪ}^{\text{೨}}+\text{ಬ}^{\text{೨}}+\text{ಮ}^{\text{೨}}+\text{೨ಪಬ}+\text{೨ಬಮ}+\text{೨ಮಪ}$$
$$=(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})^{\text{೨}}$$
$$=(\text{ಯ}-\text{ರ}+\text{ರ}-\text{ವ}+\text{ವ}-\text{ಯ})^{\text{೨}}$$
$$=\text{೦}.$$

* ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ **ಪ, ಬ, ಮ** ಈ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಸಹ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಈ ಹಂತವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಯ = ಕ + ಗ — ಅ, ರ = ಗ + ಅ — ಕ, ಸ = ಅ + ಕ — ಇದ್ದರೆ ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಸ^{೨} + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ = ಅ^{೨} + ಕ^{೨} + ಗ^{೨} + ೨ಅಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಅ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಸ^{೨} + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ

= (ಯ + ರ + ಸ)^{೨}

= (ಕ + ಗ — ಅ + ಗ + ಅ — ಕ + ಅ + ಕ — ಗ)^{೨}

= (ಅ + ಕ + ಗ)^{೨}

= ಅ^{೨} + ಕ^{೨} + ಗ^{೨} + ೨ಅಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಅ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪.

೧. ಕ + ಗ + ಘ = ೮, ಮತ್ತು ಕ^{೨} + ಗ^{೨} + ಘ^{೨} = ೩೦ ಇದ್ದರೆ ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ = ?

೨. ತ + ದ + ನ = ೦, ತದ + ದನ + ನತ = — ೧೯ ಇದ್ದರೆ ತ^{೨} + ದ^{೨} + ನ^{೨} = ?

೩. ಪ — ಬ + ಮ = ೬ ಮತ್ತು ಪಬ + ಬಮ — ಮಪ + ೧೧ = ೦ ಇದ್ದರೆ ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} = ?

೪. ಅ + ಕ = ಗ + ೧ ಮತ್ತು ಗ(ಅ + ಕ) = ಅಕ + ೨೨ ಇದ್ದರೆ ಅ^{೨} + ಕ^{೨} + ಗ^{೨} = ?

೫. ೨(ಯ + ರ + ಲ + ೧) = ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಲ^{೨} = ೧೪ ಇದ್ದರೆ ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ?

೬. $\frac{೧}{ಯ} + \frac{೧}{ರ} + \frac{೧}{ಲ}$ = —೪ ಮತ್ತು $\frac{೧}{ಯ^{೨}} + \frac{೧}{ರ^{೨}} + \frac{೧}{ಲ^{೨}}$ = ೧೪

ಇದ್ದರೆ $\frac{೧}{ಯರ} + \frac{೧}{ರಲ} + \frac{೧}{ಲಯ}$ = ?

೭. ಪ — ಬ — ಮ = $\frac{೧}{೨}$, ಮತ್ತು ಪಬ + ಪಮ — ಬಮ = $\frac{೩}{೪}$ ಇದ್ದರೆ ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} = ?

ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೮. (ಪ — ೨ಬ)^{೨} + (೨ಬ — ೩ಮ)^{೨} + (೩ಮ — ೪ಪ)^{೨} +

$೨(ಪ - ೨ಬ)(೨ಬ - ೩ಮ) + ೨(೨ಬ - ೩ಮ)(೩ಮ - ೪ಪ) + ೨(೩ಮ - ೪ಪ)(ಪ - ೨ಬ).$

೯. $ಕ^೨(ಗ - ಘ)^೨ + ಗ^೨(ಘ - ಕ)^೨ + ಘ^೨(ಕ - ಗ)^೨ + ೨ಕಗ(ಗ - ಘ)(ಘ - ಕ) + ೨ಗಘ(ಘ - ಕ)(ಕ - ಗ) + ೨ಘಕ(ಕ - ಗ)(ಗ - ಘ).$

೧೭. ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೭೫) ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆಂದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಪದಗಳಿದ್ದರೂ ಆ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವು ಆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಬೇರೀಜು ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $ಪ + ಬ + ಭ + ಮ$ ದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಭ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಪಭ + ೨ಪಮ + ೨ಬಭ + ೨ಬಮ + ೨ಭಮ$ ಎಂದು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಇಲ್ಲಿನ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$(ಪ + ಬ + ಭ + ಮ)^೨$$
$$\equiv ಪ^೨ + ೨ಪ(ಬ + ಭ + ಮ) + (ಬ + ಭ + ಮ)^೨$$
$$\equiv ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಪಭ + ೨ಪಮ + ಬ^೨ + ಭ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಬಭ + ೨ಬಮ + ೨ಭಮ$$
$$\equiv ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಭ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಪಭ + ೨ಪಮ + ೨ಬಭ + ೨ಬಮ + ೨ಭಮ.$$

ಇದರಂತೆಯೇ ಯಾವದೇ ಬಹುಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮುಂದಿನ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು.

$$(ಪ + ಬ + ಮ)^೨ \equiv ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪ(ಬ + ಮ) + ೨ಬಮ;$$
$$(ಪ + ಬ + ಭ + ಮ)^೨$$
$$\equiv ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಭ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪ(ಬ + ಭ + ಮ) + ೨ಬ(ಭ + ಮ) + ೨ಭಮ;$$

$(ಪ+ಫ+ಬ+ಭ+ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}+ಫ^{೨}+ಬ^{೨}+ಭ^{೨}+ಮ^{೨}+$
$೨ಪ(ಫ+ಬ+ಭ+ಮ)+೨ಫ(ಬ+ಭ+ಮ)+$
$೨ಬ(ಭ+ಮ)+೨ಭಮ.$

ಉ. ೧. $೨ಯ-೩ರ-ಲ+೫ಸ$ ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$(೨ಯ-೩ರ-ಲ+೫ಸ)^{೨}$
$=(೨ಯ)^{೨}+(-೩ರ)^{೨}+(-ಲ)^{೨}+(೫ಸ)^{೨}+೨.೨ಯ(-೩ರ)$
$+೨.೨ಯ(-ಲ)+೨.೨ಯ.೫ಸ+೨(-೩ರ)(-ಲ)$
$+೨(-೩ರ).೫ಸ+೨(-ಲ).೫ಸ$
$= ೪ಯ^{೨}+೯ರ^{೨}+ಲ^{೨}+೨೫ಸ^{೨}-೧೨ಯರ-೪ಯಲ+$
$೨೦ಯಸ+೬ರಲ+೩೦ರಸ+೧೦ಲಸ.$

* ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಾಕಷ್ಟು ರೂಢಿಯು ಆದಮೇಲೆ ಈ ನಡುವಿನ ಹಂತದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯೆನಿಸಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ.

ಉ. ೨. $(ಪ+ಮ)^{೬}$ ದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$(ಪ+ಮ)^{೬}=\left\{(ಪ+ಮ)^{೩}\right\}^{೨}$
$=(ಪ^{೩}+೩ಪ^{೨}ಮ+೩ಪಮ^{೨}+ಮ^{೩})^{೨}$
$=ಪ^{೬}+೯ಪ^{೪}ಮ^{೨}+೯ಪ^{೨}ಮ^{೪}+ಮ^{೬}+೬ಪ^{೫}ಮ+$
$೬ಪ^{೪}ಮ^{೨}+೨ಪ^{೩}ಮ^{೩}+೧೮ಪ^{೩}ಮ^{೩}+೬ಪ^{೨}ಮ^{೪}+೬ಪಮ^{೫}$
$=ಪ^{೬}+೬ಪ^{೫}ಮ+೧೫ಪ^{೪}ಮ^{೨}+೨೦ಪ^{೩}ಮ^{೩}+$
$೧೫ಪ^{೨}ಮ^{೪}+೬ಪಮ^{೫}+ಮ^{೬}.$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. $ತ-ದ+ಧ+ನ.$ ೨. $೩ಪ-೪ಬ-ಭ-ಮ.$

೩. $೨ಪ-\frac{೧}{ಪ}-೪ಮ+\frac{೭}{ಮ}.$ ೪. $೫ಯ-ರ+೩ಲ-೧.$

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:-

೫. $(ಪ-ಮ)^{೬}.$ ೬. $(೨ಯ+ರ)^{೬}.$ ೭. $(ತ-೩ನ$

೮. $(೩ಯ-೨ಲ)^{೬}.$ ೯. $(೨ರ-೩ಸ)^{೬}$

೩.

$(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)\equiv ಪ^{೨}-ಮ^{೨}$

೧೮. ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೧, ಪ್ರ. ೯೯) ಯಾವುದೇ **ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರಿಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ** ಅಂದರೇಯೇ $(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)\equiv ಪ^{೨}-ಮ^{೨}$ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಆಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಭಾ. ೨, ಪ್ರ. ೮೭-೮೮ ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಉಜಳಣೆಗಾಗಿ ಇಂದು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ತ+ದ+೨ನ ಮತ್ತು ೨ನ−ತ−ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಚಿನ್ಹವಿರುವ ಎರಡು ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಂಪಿನ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು **ಪ** ಈ ಆದೇಶದಿಂದ ಮಾಡಿ, ಇಷ್ಟ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$(ತ+ದ+೨ನ)(೨ನ-ತ-ದ)$

$=\{೨ನ+(ತ+ದ)\}\{೨ನ-(ತ+ದ)\}$

$=(೨ನ+ಪ)(೨ನ-ಪ)$ *

$=(೨ನ)^{೨}-(ಪ)^{೨}$ *

$=೪ನ^{೨}-(ತ+ದ)^{೨}$ [**ಪ** ದ ಬದಲಾಗಿ ತ+ದ ಬರೆದು

$=೪ನ^{೨}-(ತ^{೨}+೨ತದ+ದ^{೨})$

$=೪ನ^{೨}-ತ^{೨}-೨ತದ-ದ^{೨}$.

ಉ. ೨. ೫ಯ−೭ರ+೩ಸ ಮತ್ತು ೫ಯ+೭ರ−೩ಸ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ, ೫ಯ, ದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇದ್ದು ೭ರ ಮತ್ತು ೩ಸ ಇವುಗಳ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹಗಳು ಭಿನ್ನ ಅಂ. ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ − ಮತ್ತು + ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇದರ ವಿರುದ್ಧ ಅಂ. + ಮತ್ತು − ಇದ್ದುದರಿಂದ,

೭ರ — ೩ಸ ಇದೊಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಉಲ್ಲೇಖ-ವನ್ನು **ಮ** ದಿಂದ ಮಾಡಿ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$(೫ಯ - ೭ರ + ೩ಸ)(೫ಯ + ೭ರ - ೩ಸ)$
$= \{೫ಯ - (೭ರ - ೩ಸ)\}\{೫ಯ + (೭ರ - ೩ಸ)\}$
$= (೫ಯ - ಮ)(೫ಯ + ಮ)$ *
$= (೫ಯ)^{೨} - ಮ^{೨}$ *
$= ೨೫ಯ^{೨} - (೭ರ - ೩ಸ)^{೨}$ [∵ $ಮ = ೭ರ - ೩ಸ$
$= ೨೫ಯ^{೨} - (೪೯ರ^{೨} - ೪೨ರಸ + ೯ಸ^{೨})$
$= ೨೫ಯ^{೨} - ೪೯ರ^{೨} + ೪೨ರಸ - ೯ಸ^{೨}$.

ಉ. ೩ $೨ಯ - ೪ರ - ೩ಲ + ೫ಸ$ ಮತ್ತು $೨ಯ + ೪ರ - ೩ಲ - ೫ಸ$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವೇ ಚಿನ್ಹಗಳಿರುವ ೨ಯ ಮತ್ತು ೩ಲ ಈ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ ಚಿನ್ಹಗಳಿರುವ ೪ರ ಮತ್ತು ೫ಸ ಈ ಪದಗಳ ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನ ಬದಲಾಗಿ ಅಂ. ೨ಯ—೩ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ **ಷ** ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಬದಲಾಗಿ ಅಂ. ೪ರ — ೫ಸ, ಬದಲಾಗಿ **ಮ** ಎಂದು ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರ-ವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಗುಣಾಕಾರವು =
$\{(೨ಯ - ೩ಲ) - (೪ರ - ೫ಸ)\}\{(೨ಯ - ೩ಲ) + (೪ರ - ೫ಸ)\}$
$= (ಷ - ಮ)(ಷ + ಮ)$ *
$= ಷ^{೨} - ಮ^{೨}$ *
$= (೨ಯ - ೩ಲ)^{೨} - (೪ರ - ೫ಸ)^{೨}$
$= (೪ಯ^{೨} - ೧೨ಯಲ + ೯ಲ^{೨}) - (೧೬ರ^{೨} - ೪೦ರಸ + ೨೫ಸ^{೨})$
$= ೪ಯ^{೨} - ೧೨ಯಲ + ೯ಲ^{೨} - ೧೬ರ^{೨} + ೪೦ರಸ - ೨೫ಸ^{೨}$.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$(ಪ+ಬ+ಮ)(ಪ+ಬ-ಮ)(ಪ-ಬ+ಮ)$
$(-ಪ+ಬ+ಮ)$.

$(ಪ+ಬ+ಮ)(ಪ+ಬ-ಮ)(ಪ-ಬ+ಮ)$
$(-ಪ+ಬ+ಮ)$
$\equiv\{(ಪ+ಬ)+ಮ\}\{(ಪ+ಬ)-ಮ\}\{ಮ+(ಪ-ಬ)\}$
$\{ಮ-(ಪ-ಬ)\}$
$\equiv\{(ಪ+ಬ)^೨-ಮ^೨\}\{ಮ^೨-(ಪ-ಬ)^೨\}$
$\equiv(ಪ^೨+೨ಪಬ+ಬ^೨-ಮ^೨)(ಮ^೨-ಪ^೨+೨ಪಬ-ಬ^೨)$
$\equiv\{೨ಪಬ+(ಪ^೨+ಬ^೨-ಮ^೨)\}\{೨ಪಬ-(ಪ^೨+ಬ^೨-ಮ^೨)\}$
$\equiv(೨ಪಬ)^೨-(ಪ^೨+ಬ^೨-ಮ^೨)^೨$
$\equiv೪ಪ^೨ಬ^೨-(ಪ^೪+ಬ^೪+ಮ^೪+೨ಪ^೨ಬ^೨-೨ಬ^೨ಮ^೨-೨ಮ^೨ಪ^೨)$
$\equiv೨ಪ^೨ಬ^೨+೨ಬ^೨ಮ^೨+೨ಮ^೨ಪ^೨-ಪ^೪-ಬ^೪-ಮ^೪$.

ಈ **ನಿತ್ಯಸಮದ** ಉಪಯೋಗವು ಗುಣಪ್ರಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕದ್ದು.

ಉ. ೫. ೬೧೨ ಕ್ಕೆ ೫೮೮ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೬೧೨×೫೮೮
$=(೬೦೦+೧೨)(೬೦೦-೧೨)$
$=(೬೦೦)^೨-(೧೨)^೨$
$=೩೬೦೦೦೦-೧೪೪$
$=೩೫೯೮೫೬$.

ಉ. ೬. $ಪ^೨+೨ಪಮ+೪ಮ^೨$ ಮತ್ತು $ಪ^೨-೨ಪಮ+೪ಮ^೨$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$(ಪ^೨+೨ಪಮ+೪ಮ^೨)(ಪ^೨-೨ಪಮ+೪ಮ^೨)$
$=\{(ಪ^೨+೪ಮ^೨)+೨ಪಮ\}\{(ಪ^೨+೪ಮ^೨)-೨ಪಮ\}$

$=(ಪ^{೨}+೪ಮ^{೨})^{೨}-(೨ಪಮ)^{೨}$

$=ಪ^{೪}+೮ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೧೬ಮ^{೪}-೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}$

$=ಪ^{೪}+೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೧೬ಮ^{೪}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. $೪ಯ+ರ-೫ಲ$, $೪ಯ-ರ+೫ಲ$.

೨. $೮ಪ-೩ಬ-೨ಮ$, $೩ಬ-೨ಮ-೮ಪ$.

೩. $೯ಕ+೨ಗ-೬ಘ$, $೨ಗ-೬ಘ-೯ಕ$.

೪. $೨ಕ-೫ಗ+೩$, $೨ಕ+೫ಗ-೩$.

೫. $ಅ+೧+\frac{೧}{ಅ}$, $ಅ-೧+\frac{೧}{ಅ}$.

೬. $೫ಲ^{೨}-೩ಲಸ+೪ಸ^{೨}$, $೫ಲ^{೨}+೩ಲಸ+೪ಸ^{೨}$.

೭. $೪ಪ+೨ಬ-೭ಭ-೩ಮ$, $೪ಪ-೨ಬ+೭ಭ-೩ಮ$.

೮. $೨ತ+೫ದ-೬ಧ+೩ನ$, $೨ತ-೫ದ-೬ಧ+೩ನ$.

೯. $ಅ^{೨}+ಅ+೧$, $ಅ^{೨}-ಅ+೧$, $ಅ^{೪}-ಅ^{೨}+೧$.

೧೦. $೧+೨ಪ+೪ಪ^{೨}$, $೧-೨ಪ+೪ಪ^{೨}$, $೧-೪ಪ^{೨}+೧೬ಪ^{೪}$.

೧೧. $೧೬ಯ^{೮}+ರ^{೮}$, $೨ಯ^{೨}+೨ಯರ+೨ರ^{೨}$, $೨ಯ^{೨}-೨ಯರ+ರ^{೨}$, $೨ಯ^{೨}+ರ^{೨}$, $೨ಯ^{೨}-ರ^{೨}$.

ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧೨. ೮೬×೧೧೪. ೧೩. ೭೭೫×೮೨೫. ೧೪. $೩೯\times೪೧\times೧೬೦೧$.

೪.

$(ಪ\pm ಮ)^{೩}\equiv ಪ^{೩}\pm ಮ^{೩}\pm ೩ಪಮ(ಪ\pm ಮ)$

೧೯. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೬೪,೬೬) ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ವಿಶಿಷ್ಟ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಬಿಡಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಹೇಗಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಅದರ ಮುಂದಿನ

ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೫–೧೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅದೇ ಸಂಗತಿಯ ತಿರುಗಿ ಉಜಳಣಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಆ ವಿಷಯದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಮುಂದೆ ಮಾಡುವಾ.

ನಮಗೆ ಪ+ಬ+ಮ ಇಂತಹ ಯಾವದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಪದಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಮಗೆ ಅದನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ+ಬ ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಈ ಆದೇಶವನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ,

$(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}=(ಅ+ಮ)^{೩}$

$=ಅ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಅ^{೨}ಮ+೩ಅಮ^{೨}$

$=(ಪ+ಬ)^{೩}+ಮ^{೩}+೩(ಪ+ಬ)^{೨}ಮ+೩(ಪ+ಬ)ಮ^{೨}$ [$\because$ ಅ=ಪ+ಬ

$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+ಮ^{೩}+೩(ಪ^{೨}+ಬ^{೨}+೨ಪಬ)ಮ+$
$+೩(ಪ+ಬ)ಮ^{೨}$

$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩(ಪ^{೨}+ಬ^{೨})ಮ+೬ಪಬಮ$
$+೩(ಪ+ಬ)ಮ^{೨}$

$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪ^{೨}ಬ+೩ಪಬ^{೨}+೩ಮಪ^{೨}+೩ಬ^{೨}ಮ+$
$೬ಪಬಮ+೩ಮ^{೨}ಪ+೩ಬಮ^{೨}$

$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪ^{೨}ಬ+೩ಪಬ^{೨}+೩ಬ^{೨}ಮ+೩ಬಮ^{೨}+$
$೩ಮ^{೨}ಪ+೩ಮಪ^{೨}+೬ಪಬಮ.$

ಇದೇ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು $ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩ಬಮ(ಬ+ಮ)+೩ಮಪ(ಮ+ಪ)+೬ಪಬಮ$ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ $ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+೩ಬ^{೨}(ಮ+ಪ)+೩ಮ^{೨}(ಪ+ಬ)+೬ಪಬಮ$ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}$

$=\{(ಪ+ಬ)+ಮ\}^{೩}$

$=(ಪ+ಬ)^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಮ(ಪ+ಬ)(ಪ+ಬ+ಮ)$

$\equiv ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ೩ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಮ^{೩} + ೩ಮ(ಪ + ಬ)(ಪ + ಬ + ಮ)$
$\equiv ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩(ಪ + ಬ)\{ಪಬ + ಮ(ಪ + ಬ + ಮ)\}$
$\equiv ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩(ಪ + ಬ)\{ಪ(ಬ + ಮ) + ಮ(ಬ + ಮ)\}$
$\equiv ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩(ಪ + ಬ)(ಬ + ಮ)(ಮ + ಪ)$.

ತ್ರಿಪದದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರದ ಈ ನಾಲ್ಕೂ ರೂಪಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

೧·೧೦. $(ಪ + ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$

ಮತ್ತು $(ಪ - ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} - ಮ^{೩} - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$

ಈ **ನಿತ್ಯಸಮ**ಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ನಮಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಪ^{೩} + ಮ^{೩} \equiv (ಪ + ಮ)^{೩} - ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$ ಮತ್ತು $ಪ^{೩} - ಮ^{೩} \equiv (ಪ - ಮ)^{೩} + ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$ ಈ **ನಿತ್ಯಸಮಗಳು** ದೊರೆಯುವವು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಆಗಾಗ್ಗೆ ಆಗುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು.

೧·೧೧. ಮೂರರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು $(ಪ + ಮ)^{೩}$ ದ ಇಲ್ಲವೆ $(ಪ + ಬ + ಮ)^{೩}$ ದ ವಿಸ್ತಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಇದರ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಹಿಂದೆ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ $(ಪ \pm ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} \pm ಮ^{೩} \pm ೩ಪಮ(ಪ \pm ಮ)$

ಈ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಬೇರೆ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $(ಯ + ರ)^{೩} - ೩(ಯ + ರ)^{೨}(ಯ - ರ) + ೩(ಯ + ರ)(ಯ - ರ)^{೨} - (ಯ - ರ)^{೩}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಯ + ರ ಮತ್ತು ಯ − ರ ಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ** ಮತ್ತು **ಮ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ರಾಶಿಯು $\equiv ಪ^{೩} - ೩ಪ^{೨}ಮ + ೩ಪಮ^{೨} - ಮ^{೩}$ *

= (ಪ − ಮ)^{೩} *

= {(ಯ + ರ) − (ಯ − ರ)}^{೩} [∵ ಪ = ಯ + ರ ಮತ್ತು ಮ = ಯ − ರ]

= (೨ರ)^{೩}

= ೮ರ^{೩}.

ಉ. ೨. ೮(೩ಕ − ೫ಗ) + ೩೬(೩ಕ − ೫ಗ)^{೨}(೩ಗ − ೨ಕ)

+ ೫೪(೩ಕ − ೫ಗ)(೩ಗ − ೨ಕ)^{೨} + ೨೭(೩ಗ − ೨ಕ)^{೩}

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨(೩ಕ − ೫ಗ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೩(೩ಗ − ೨ಕ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು = ಪ^{೩} + ೩ಪ^{೨}ಮ + ೩ಪಮ^{೨} + ಮ^{೩}

= (ಪ + ಮ)^{೩} *

= {೨(೩ಕ − ೫ಗ) + ೩(೩ಗ − ೨ಕ)}^{೩}

= (೬ಕ − ೧೦ಗ + ೯ಗ − ೬ಕ)^{೩}

= (− ಗ)^{೩}

= − ಗ^{೩}.

ಉ. ೩. (ಯ − ರ + ಸ)^{೩} − ೩(ಯ − ರ + ಸ)^{೨}(ಯ + ರ + ಸ)

+ ೩(ಯ − ರ + ಸ)(ಯ + ರ + ಸ)^{೨} − (ಯ + ರ + ಸ)^{೩}

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಯ − ರ + ಸ ದ ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಯ + ರ + ಸ ದ ಮ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು = ಪ^{೩} − ೩ಪ^{೨}ಮ + ೩ಪಮ^{೨} − ಮ^{೩} *

= (ಪ − ಮ)^{೩} *

= {(ಯ − ರ + ಸ) − (ಯ + ರ + ಸ)}^{೩}

= (− ೨ರ)^{೩}

= − ೮ರ^{೩}.

* **ಪ, ಮ** ಈ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೪. ಯ + ರ = ೭, ಮತ್ತು ಯರ = ೧೨ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ + ರ^೩ = ?$

$ಯ^೩ + ರ^೩ = (ಯ + ರ)^೩ - ೩ಯರ(ಯ + ರ)$

$= ೭^೩ - ೩ \times ೧೨ \times ೭$

$= ೩೪೩ - ೨೫೨$

$= ೯೧.$

ಉ. ೫. $ಪ = ೧೩\frac{೧}{೫}$ ಮತ್ತು $ಮ = ೧೬\frac{೧}{೪}$ ಇದ್ದರೆ

$೧೨೫ಪ^೩ - ೩೦೦ಪ^೨ಮ + ೨೪೦ಪಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩ = ?$

$೧೨೫ಪ^೩ - ೩೦೦ಪ^೨ಮ + ೨೪೦ಪಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩$

$= (೫ಪ)^೩ - ೩(೫ಪ)^೨.೪ಮ + ೩.೫ಪ(೪ಮ)^೨ - (೪ಮ)^೩$

$= (೫ಪ - ೪ಮ)^೩$

$= (೫ \times ೧೩\frac{೧}{೫} - ೪ \times ೧೬\frac{೧}{೪})^೩$

$= (೬೬ - ೬೫)^೩$

$= (೧)^೩$

$= ೧.$

ಉ. ೬. $ಯ - \frac{೧}{ಯ} = ೧\frac{೧}{೩}$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = ?$

$ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ}\right)^೩ + ೩ಯ.\frac{೧}{ಯ}(ಯ - \frac{೧}{ಯ})$

$= (ಯ - \frac{೧}{ಯ})^೩ + ೩(ಯ - \frac{೧}{ಯ})$

$= (\frac{೪}{೩})^೩ + ೩ \times \frac{೪}{೩}$

$= \frac{೬೪}{೨೭} + \frac{೧೨}{೩}$

$= ೨\frac{೧೦}{೨೭} + ೪\frac{೦}{೩}$

$= ೬\frac{೧೦}{೨೭}.$

ಉ. ೭. $ಪ + \frac{೧}{ಪ} = ಅ$ ಇದ್ದರೆ

$ಪ^೩ + \frac{೧}{ಪ^೩} = ಅ - ೩ಅ^೩$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$ಪ + \frac{೧}{ಪ} = ಅ$$

ಘನಮಾಡಿ, $ಪ^೩ + \frac{೧}{ಪ^೩} + ೩ಪ\cdot\frac{೧}{ಪ}\left(ಪ + \frac{೧}{ಪ}\right) = ಅ^೩$

$$\therefore ಪ^೩ + \frac{೧}{ಪ^೩} + ೩ಅ^೩ = ಅ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $ಪ^೩ + \frac{೧}{ಪ^೩} = ಅ^೩ - ೩ಅ.$

ಉ. ೮. $ಯ + ರ = ೩$ ಇದ್ದರೆ

$ಯ^೩ + ರ^೩ + ೯ಯರ = ೨೭$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$ಯ + ರ = ೩$$

ಘನಮಾಡಿದರೆ, $ಯ^೩ + ರ^೩ + ೩ಯರ(ಯ + ರ) = ೨೭$

$\therefore ಯ^೩ + ರ^೩ + ೩ಯರ(೩) = ೨೭ \; [\because ಯ + ರ = ೩$

$\therefore ಯ^೩ + ರ^೩ + ೯ಯರ = ೨೭.$

ಉ. ೯. $(೫ಕ - ೩ಗ)^೩ - (೩ಕ - ೫ಗ)^೩ - ೬(೫ಕ - ೩ಗ)(೩ಕ - ೫ಗ)$

$(ಕ + ಗ)$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ

೫ಕ ೩ಗ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು **ಪ** ದಿಂದ ಮತ್ತು

೩ಕ-೫ಗ ದ **ಮ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ

$ಪ - ಮ = (೫ಕ - ೩ಗ) - (೩ಕ - ೫ಗ) =$

$೫ಕ - ೩ಗ - ೩ಕ + ೫ಗ = ೨ಕ - ೨ಗ = ೨(ಕ - ಗ)$. ಮತ್ತು

ರಾಶಿಯು $= ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$

$= (ಪ - ಮ)^೩$

$= \{೨(ಕ + ಗ)\}^೩ \; [\because ಪ - ಮ = ೨(ಕ - ಗ)$

$= ೮(ಕ^೩ + ೩ಕ^೨ಗ + ೩ಕಗ^೨ + ಗ^೩).$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವವಿವೆ.)

೧. ೩ಯ + ೨. ೨. ೮ರ − ೩. ೩. ೩ಯ + ೪ಕ್ಷ.

೪. ಪ+೨ಬ+೩ಮ. ೫. ೩ಪ−ಬ−೪ಮ. ೬. ೫ಯ−೨ರ+೩ಸ.

೭. ಪ²−ಪ−೧. ೮. ಪ²+ಪಮ+ಮ². ೯. ೩ಯ²+೨ಯ+೧.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

೧೦. (ಯ−ನ)³ −(ಯ−ಮ)³ +೩(ನ−ಮ)(ಯ−ನ)(ಯ−ಮ).

೧೧. (೨ನ−೩ಮ)³ −(೩ನ−೨ಮ)³ +೩(೨ನ−೩ಮ)(೩ನ−೨ಮ) (ನ+ಮ).

೧೨. ೮(ನ−೪ಮ)³ −೧೨(ನ−೪ಮ)²(೪ನ−ಮ)+ ೬(ನ−೪ಮ)(೪ನ−ಮ)² −(ನ−೪ಮ)³.

೧೩. (ಯ+ರ+ಸ)³ +(ಯ+ರ−ಸ)³ − ೬(ರ+ಸ)(ಯ+ರ+ಸ)(ಯ−ರ+ಸ).

೧೪. (ಯ+ಅ−ಜ)³ −(ಯ−ಅ+ಜ)³ − ೬(ಅ−ಜ)²−(ಯ+ಅ−ಜ)(ಯ−ಅ+ಜ).

೧೫. ಪ+ಮ=೫ ಮತ್ತು ಪಮ=೬ ಇದ್ದರೆ ಪ³+ಮ³=?

೧೬. ತ+ದ=೧ ಮತ್ತು ತದ= ೧/೪ ಇದ್ದರೆ ತ³+ದ³=?

೧೭. ನ−ಮ= −೩ ಮತ್ತು ನಮ= −೨ ಇದ್ದರೆ ನ³−ಮ³=?

೧೮. ನ+ ೧/ನ = −೨ ಇದ್ದರೆ ನ+ ೧/ನ² =?

೧೯. ಪ− ೧/ಪ =೨ ೧/೨ ಇದ್ದರೆ ಪ³ − ೧/ಪ³ = ?

೨೦. ನ− ೧/ನ =೧ ೧/೩ ಇದ್ದರೆ ನ³ − ೧/ನ³ = ?

೨೧. ಮ=೫ ಇದ್ದರೆ ಮ³ −೧೫ಮ² +೭೫ಮ −೧೨೫= ?

೨೨. ನ= ೨/೩ ಇದ್ದರೆ ನ³ +ನ² + ೧/೩ ನ+ ೧/೨೭ = ?

೨೩. ನ=೨, ಮ=೩ ಇದ್ದರೆ ೨೭ನ³ −೫೪ನ²ಮ +೩೬ನಮ² −೮ಮ³= ?

೨೪. ರ=೬ ೧/೩, ಸ=−೧ ೧/೪ ಇದ್ದರೆ
೮ರ³ +೩೬ರ²ಸ +೫೪ರಸ² +೨೭ಸ³ +೧೨೫= ?

೨೫. ನ+ಮ=೭ ಇದ್ದರೆ
ನ³ +ಮ³ +೨೧ನಮ=೩೪೩ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೨೬. ತ − ದ = ೮ ಇದ್ದರೆ

ತ^3 − ದ^3 − ೨೪ತದ = ೫೧೨ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨೭. ಕ + ಗ = ೩ ಇದ್ದರೆ

ಕ^3 + ಗ^3 + ೯ಕಗ = ?

೨೮. ಪ − ಮ = −೪ ಇದ್ದರೆ

ಪ^3 − ಮ^3 + ೧೨ಪಮ = ?

೨೯. ಪ^2 − ಬ^2 = ಮ^2 ಇದ್ದರೆ

ಪ^6 − ಬ^6 − ೩ಪ^{2}ಬ^{2}ಮ^2 = ಮ^6 ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೩೦. ೨ನ + ಮ = ೪ ಇದ್ದರೆ

೮ನ^3 + ಮ^3 + ೨೪ನಮ − ೬೪ = ೦ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೩೧. ೩ನ − ೨ಮ = ೨ ಇದ್ದರೆ

೨೭ನ^3 − ೮ಮ^3 − ೩೬ನಮ = ೮ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫.

(ಯ + ಪ)(ಯ + ಬ)(ಯ + ಮ) ≡ ಯ^3 + (ಪ + ಬ + ಮ)ಯ^2 + (ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)ಯ + ಪಬಮ.

೧·೧೩. ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨. ಪ್ರ·೭೪, ೭೫) ಯಾವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪದವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವದೋ ಅಂಥ ಮೂರು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ.

(ಯ + ಪ) (ಯ + ಬ) (ಯ + ಮ)

≡ (ಯ^2 + ಪಯ + ಬಯ + ಪಬ)(ಯ + ಮ)

≡ ಯ^3 + ಪಯ^2 + ಬಯ^2 + ಪಬಯ + ಮಯ^2 + ಮಪಯ + ಬಮಯ + ಪಬಮ .

≡ ಯ^3 + (ಪಯ^2 + ಬಯ^2 + ಮಯ^2) + (ಪಬಯ + ಬಮಯ + ಮಪಯ) + ಪಬಮ.

≡ ಯ^3 + (ಪ + ಬ + ಮ)ಯ^2 + (ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)ಯ + ಪಬಮ

ಯಾವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವದೋ ಅಂಥ ಮೂರು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ಘನ+ ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ವರ್ಗ ಗುಣಿಲೆ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು + ಸಾಧಾರಣ ಪದ ಗುಣಿಲೆ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು + ಆ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಂದು ಇದೇ ಸಂಗತಿಯ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜಳಣೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. (ಯ+೧)(ಯ+೩)(ಯ+೬)

$=$ ಯ^3+(೧+೩+೬)ಯ^2+(೧·೩+೩·೬+೬·೧)ಯ +೧.೩·೬

$=$ ಯ^3+೧೦ಯ^2+೨೭ಯ+೧೮.

ಉ. ೨. (ರ+೨) (ರ−೪) (ರ+೮)

$=$ ರ^3+(೨−೪+೮)ರ^2+(−೨.೪−೪·೮+೮·೨)ರ −೨·೪·೮

$=$ ರ^3+೬ರ^2−೨೪ರ−೬೪.

ಉ. ೩. (ಸ−೩) (ಸ+೫)(ಸ−೧೦)

$=$ ಸ^3+(−೩+೫−೧೦)ಸ^2+ (−೩.೫−೫.೧೦+೧೦.೩)ಸ+೧೫೦.

$=$ ಸ^3+೮ಸ^2+೩೫ಸ+೧೫೦.

ಉ. ೪. (ನ−೮)(ನ+೫)(ನ−೨) ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ,

(−೮)+೫+(−೨)=−೫,

(−೮)·೫+೫.(−೨)+(−೨)(−೮)=−೪೦−೧೦+ ೧೬=−೩೪,

ಮತ್ತು (−೮).೫.(−೨)=೮೦, ಇದ್ದುದರಿಂದ

ಇಷ್ಟ ಗುಣಾಕಾರವು= ನ^3−೫ನ^2−೩೪ನ+೮೦.

ಉ. ೫. $(ಪ-೭ಅ)(ಪ+೫ಅ)(ಪ-೩ಅ)$

$=ಪ^{3}+(-೭ಅ+೫ಅ-೩ಅ)ಪ^{2}+$

$(-೭ಅ.೫ಅ+೫ಅ.೩ಅ+೩ಅ.೭ಅ)ಪ+(-೭ಅ)(೫ಅ)(-೩ಅ)$

$=ಪ^{3}-೫ಅಪ^{2}-೨೯ಅ^{2}ಪ+೧೦೫ಅ^{3}.$

ಉ. ೬. $(ಅ-೧೧)(ಅ-೬)(ಅ-೨)-(ಅ-೬)^{2}(ಅ-೭)$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$(ಅ-೧೧)(ಅ-೬)(ಅ-೨)$

$=ಅ^{3}-(೧೧+೬+೨)ಅ^{2}+(೧೧\cdot೬+೬\cdot೨+೨\cdot೧೧)ಅ$

$-೧೧.೬.೨$

$=ಅ^{3}-೧೯ಅ^{2}+೧೦೦ಅ-೧೩೨$

$(ಅ-೬)^{2}(ಅ-೭)$

$=ಅ^{3}-(೬+೬+೭)ಅ^{2}+(೬\cdot೬+೬\cdot೭+೭\cdot೬)ಅ-೬\cdot೬\cdot೭$

$=ಅ^{3}-೧೯ಅ^{2}+೧೨೦ಅ-೨೫೨$

$\therefore$ ರಾಶಿಯು$=(ಅ^{3}-೧೯ಅ^{2}+೧೨೦ಅ-೧೩೨)$

$-(ಅ^{3}-೧೯ಅ^{2}+೧೨೦ಅ-೨೫೨)$

$=-೨೦ಅ+೧೨೦.$

ಇಲ್ಲಿನ, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ $ಅ-೬$ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿರುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ

ರಾಶಿಯು$=(ಅ-೬)\{(ಅ-೧೧)(ಅ-೨)-(ಅ-೬)(ಅ-೭)\}$

$=(ಅ-೬)\{(ಅ^{2}-೧೩ಅ+೨೨)-(ಅ^{2}-೧೩ಅ+೪೨)\}$

$=-೨೦(ಅ-೬)$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ರೀತಿಯು ಮೊದಲನೆಯದರಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಶೀಘ್ರವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $ಯ+೫, ಯ+೮, ಯ+೩.$ ೨. $ಲ-೭, ಲ+೩, ಲ-೬.$

೩. ವ − ೮, ವ − ೧೦, ವ − ೩. ೪. ೫ − ಮ, ೭ − ಮ, ೧೦ − ಮ.

೫. ೫ − ೩ಕ, ೫ − ೨ಕ, ೫ + ೬ಕ. ೬. ೨ಕ + ೫, ೨ಕ + ೭, ೨ಕ + ೩.

೭. ೮ರ + ೧, ೮ರ − ೫, ೮ರ + ೩. ೮. ೩ರ + ೨ಕ, ೩ರ − ೫ತ, ೩ರ + ೭ಕ.

೯. ೫ಯ − ೨ಕ, ೫ಯ − ಕ, ೫ಯ − ೪ಕ.

೧೦. ಕ + ೩ಪ, ೨ಕ + ೩ಪ, ೭ಕ + ೩ಪ.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧೧. (ಯ − ೫)(ಯ + ೮)(ಯ − ೧೦) − (ಯ + ೮)^{೨}(ಯ − ೨).

೧೨. (ರ − ೬)(ರ + ೭)(ರ + ೨) − (ರ + ೨)^{೨}(ರ − ೫).

೧೩. (ವ + ೧೧)(ವ − ೨)(ವ + ೫) − (ವ + ೫)^{೨}(ವ + ೪).

೧೪. (೨ಸ − ೩)(೨ಸ − ೫)(೨ಸ − ೯) − (೨ಸ − ೫)^{೩}.

೧೫. (೩ಸ − ೧)(೩ಸ − ೨)(೩ಸ − ೫) − (೩ಸ + ೧)(೩ಸ − ೨)(೩ಸ − ೪)
ಇದಕ್ಕೆ ಸ − ೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೧೬. (೫ಸ + ೩)(೫ಸ − ೧)(೫ಸ − ೨) − (೫ಸ − ೧)^{೨}(೫ಸ − ೪) ಇದಕ್ಕೆ
೩ಸ − ೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು)

೧.

$$ಪ^{೨}-ಮ^{೨} \equiv (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)$$

೨·೧. **ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು** ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು ೧೧೪, ೧೧೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬಂದರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೩೧). ಇಂದು ಈಗ ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

ಉ ೧ $೬೪ನ^{೪}+೧$. ಇಲ್ಲಿ $೬೪ನ^{೪}$ ಇದು $೮ನ^{೨}$ ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು $೮ನ^{೨}$ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ($೧೬ನ^{೨}$) ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರಿಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$
\begin{aligned}
೬೪ನ^{೪}+೧ &= ೬೪ನ^{೪}+೧೬ನ^{೨}+೧-೧೬ನ^{೨} \\
&= (೮ನ^{೨}+೧)^{೨}-(೪ನ)^{೨} \\
&= (೮ನ^{೨}+೪ನ+೧)(೮ನ^{೨}-೪ನ+೧).
\end{aligned}
$$

ಉ. ೨.
$$
\begin{aligned}
ಯ^{೪}+೨ಯ^{೨}+೯ &= ಯ^{೪}+೬ಯ^{೨}+೯-೪ಯ^{೨} \\
&= (ಯ^{೨}+೩)^{೨}-(೨ಯ)^{೨} \\
&= (ಯ^{೨}+೨ಯ+೩)(ಯ^{೨}-೨ಯ+೩).
\end{aligned}
$$

ಉ. ೩.
$$
\begin{aligned}
& ೪ಪ^{೨}-೯ಬ^{೨}+೩೦ಬಮ-೨೫ಮ^{೨} \\
&= ೪ಪ^{೨}-(೯ಬ^{೨}-೩೦ಬಮ+೨೫ಮ^{೨}) \\
&= (೨ಪ)^{೨}-(೩ಬ-೫ಮ)^{೨}
\end{aligned}
$$

= (೨ಪ + ೩ಬ − ೫ಮ)(೨ಪ − ೩ಬ + ೫ಮ).

ಉ. ೪. ೨(ಬಮ − ಪಭ) + ಪ^{೨} − ಬ^{೨} + ಭ^{೨} − ಮ^{೨}

= ಪ^{೨} − ೨ಪಭ + ಭ^{೨} − ಬ^{೨} + ೨ಬಮ − ಮ^{೨}.

= (ಪ^{೨} − ೨ಪಭ + ಭ^{೨}) − (ಬ^{೨} − ೨ಬಮ + ಮ^{೨})

= (ಪ − ಭ)^{೨} − (ಬ − ಮ)^{೨}

= {(ಪ − ಭ) + (ಬ − ಮ)} {(ಪ − ಭ) − (ಬ − ಮ)}

= (ಪ + ಬ − ಭ − ಮ)(ಪ − ಬ − ಭ + ಮ)

ಉ. ೫. ೯ಯ^{೪} + ೧೫ಯ^{೨}ವ^{೨} + ೧೬ವ^{೪}

= ೯ಯ^{೪} + ೨೪ಯ^{೨}ವ^{೨} + ೧೬ವ^{೪} − ೯ಯ^{೨}ವ^{೨}

= (೩ಯ^{೨} + ೪ವ^{೨})^{೨} − (೩ಯವ)^{೨}

= (೩ಯ^{೨} + ೩ಯವ + ೪ವ^{೨})(೩ಯ^{೨} − ೩ಯವ + ೪ವ^{೨}).

ಉ. ೬. ೧೫ಪ^{೨} − ಬ^{೨} − ಮ^{೨} + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ − ೨ಮಪ

= ೧೬ಪ^{೨} − (ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} − ೨ಪಬ − ೨ಬಮ + ೨ಮಪ)

= (೪ಪ)^{೨} − (ಪ − ಬ + ಮ)^{೨}

= {೪ಪ + (ಪ − ಬ + ಮ)} {೪ಪ − (ಪ − ಬ + ಮ)}

= (೫ಪ − ಬ + ಮ)(೩ಪ + ಬ − ಮ).

ಉ. ೭. (ಅ^{೨} − ಕ^{೨})(ಯ^{೨} − ರ^{೨}) − ೪ಅಕಯರ

= ಅ^{೨}ಯ^{೨} − ಅ^{೨}ರ^{೨} − ಕ^{೨}ಯ^{೨} + ಕ^{೨}ರ^{೨} − ೪ಅಕಯರ

= (ಅ^{೨}ಯ^{೨} − ೨ಅಕಯರ + ಕ^{೨}ರ^{೨}) −
(ಕ^{೨}ಯ^{೨} + ೨ಅಕಯರ + ಅ^{೨}ರ^{೨})

= (ಅಯ − ಕರ)^{೨} − (ಕಯ + ಅರ)^{೨}

= (ಅಯ − ಕರ + ಕಯ + ಅರ)(ಅಯ − ಕರ − ಕಯ − ಅರ)

= {(ಅ + ಕ)ಯ + (ಅ − ಕ)ರ} {(ಅ − ಕ)ಯ − (ಅ + ಕ)ರ}.

ಉ. ೮. ೪ಯ^{೨} − ೨೦ಯ − ೨೪ + ೪೨ರ − ೯ರ^{೨}. ಇಲ್ಲಿ ೪ಯ^{೨} − ೨೦ಯ ಈ ಜೋಡಿಗೆ ೫^{೨} ಅಂದರೆ ೨೫ ಇದ್ದರೆ ಅದು (೪ಯ^{೨} − ೨೦ಯ + ೨೫) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು:

ರಾಶಿಯು $= ೪ಯ^{೨} - ೨೦ಯ + ೨೫ - ೪೯ + ೪೨ರ - ೯ರ^{೨}$

$$= (೪ಯ^{೨} - ೨೦ಯ + ೨೫) - (೪೯ - ೪೨ರ + ೯ರ^{೨})$$

$$= (೨ಯ - ೫)^{೨} - (೭ - ೩ರ)^{೨}$$

$$= \{(೨ಯ - ೫) + (೭ - ೩ರ)\} \{(೨ಯ - ೫) - (೭ - ೩ರ)\}$$

$$= (೨ಯ - ೩ರ + ೨) (೨ಯ + ೩ರ - ೧೨).$$

೨·೨. $ಪ^{೨} - ಮ^{೨} \equiv (ಪ + ಮ) (ಪ - ಮ)$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ $ಯ^{೨} + ಕಯ + ಗ$ ಇಲ್ಲವೆ $ಆಯ^{೨} + ಕಯ + ಗ$ ದಂಥ ವರ್ಗತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೫೮-೧೬೧) ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರ ಸ್ವಲ್ಪ ಪುನರಾವಲೋಕನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಾ.

ವರ್ಗಪದದ ಸಹಗುಣಕವು ೧ ಇರುವ $ಯ^{೨} - ೫ಯ - ೩೩೬$ ದಂಥ ವರ್ಗತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? $ಯ^{೨} - ೫ಯ$ ದ ಜೊತೆಗೆ $\frac{೫}{೨}$ ದ ವರ್ಗ ಅಂದರೆ $\frac{೨೫}{೪}$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^{೨} - ೫ಯ + \frac{೨೫}{೪}$ ಇದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ರಾಶಿಯನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸುವೆವು.

ಉ. ೯. $ಯ^{೨} - ೫ಯ - ೩೩೬$

$$= ಯ^{೨} - ೫ಯ + \frac{೨೫}{೪} - \frac{೧೩೬೯}{೪}$$

$$= \left(ಯ - \frac{೫}{೨}\right)^{೨} - \left(\frac{೩೭}{೨}\right)^{೨}$$

$$= \left(ಯ - \frac{೫}{೨} - \frac{೩೭}{೨}\right) \left(ಯ - \frac{೫}{೨} - \frac{೩೭}{೨}\right)$$

$$= (ಯ + ೧೬) (ಯ - ೨೧).$$

ಉ. ೧೦. $೩೫ಯ^{೨} + ೪೬ಯ - ೨೪$

$$= ೩೫\left(ಯ^{೨} + \frac{೪೬}{೩೫}ಯ - \frac{೨೪}{೩೫}\right)$$

$$= ೩೫ \left\{ ಯ^{೨} + \frac{೪೬}{೩೫}ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫}\right)^{೨} + \left(\frac{೨೩}{೩೫}\right)^{೨} - \frac{೨೪}{೩೫} \right\}$$

$$= ೩೫ \left\{ ಯ^{೨} + \frac{೪೬}{೩೫}ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫}\right)^{೨} + \frac{೧೩೬೯}{೩೫ \times ೩೫} \right\}$$

$$= ೩೫ \left\{ \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫}\right)^{೨} - \left(\frac{೩೭}{೩೫}\right)^{೨} \right\}$$

$$= ೩೫\left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} + \frac{೩೭}{೩೫}\right)\left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} - \frac{೩೭}{೩೫}\right)$$

$$= ೭ \times ೫\left(ಯ + \frac{೧೨}{೭}\right)\left(ಯ - \frac{೨}{೫}\right)$$

$$= (೭ಯ + ೧೨)(೫ಯ - ೨).$$

ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲಿರುವ $ಯ^{೨} - ೨ಕಯ$ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ $ಯ^{೨} + ೨ಕಯ$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $ಕ^{೨}$ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಜೋಡು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ವರ್ಗಾಂತರಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ **$ಅಯ^{೨} + ಕಯ + ಗ$** ದಂಥ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸುಲಭವಾದ ಮತ್ತು ಶೀಘ್ರವಾದ ರೀತಿಯು ನೆನಪಿಗೆ ಬಾರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. $ಬ^{೨} - ೧೮ಬ + ೮೧ - ೯ಮ^{೨}$.   ೨. $೪ಱ^{೨} + ೨೮ಱ + ೪೯ - ೨೫ಕ^{೨}$.

೩. $೨೫ಱ^{೨} - ೨೦ಱಕ + ೪ಕ^{೨} - ೪ಗ^{೨} + ೪ಗಘ - ಘ^{೨}$.

೪. $ಱ^{೪} + ೪ಕ^{೪}$.   ೫. $೮೧ಪ^{೪} + ೬೪ಮ^{೪}$.

೬. $೩೨೪ರ^{೪} + ೬೨೫ಸ^{೪}$.   ೭. $ಯ^{೪} - ೩ಯ^{೨} + ೧$.

೮. $ಪ^{೪} - ೧೧ಪಮ + ಮ^{೪}$.   ೯. $೯ಯ^{೪} - ೧೩ಯ^{೨}ರ^{೨} - ೪ರ^{೨}$.

೧೦. $೬೪ಮ^{೪} + ೨೩ಮ^{೨}ಯ^{೨} + ೯ಯ^{೪}$.

೧೧. ೮೧ಪ^{೪} − ೪೦ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ೪ಮ^{೪}.

೧೨. ೪ಯ^{೨} + ೨೦ಯ + ೧೬ − ೨೪ರ − ೧೬ರ^{೨}.

೧೩. ೨೫ನ^{೨} − ೯ಮ^{೨} − ೨೦ನ + ೬ಮ + ೩.

೧೪. ೪ರ^{೨} − ಸ^{೨} − ೧೨ರ − ೧೦ಸ − ೧೬.

೧೫. ಯ^{೨} + ರ^{೨} − ಲ^{೨} − ಪ^{೨} + ೨ಯರ + ೨ಲಪ.

೧೬. ೪ತ^{೨} + ೨೫ದ^{೨} − ೯ನ^{೨} − ೨೦ತದ + ೨೪ನ − ೧೬.

೧೭. ೨೫ಚ^{೨} − ೫ಕ^{೨} − ೧೬ಗ^{೨} + ೨೦ಚಕ + ೨೪ಕಗ.

೮೧. ೮ಪ^{೨}ಬ^{೨} + ೨ಬ^{೨}ಮ^{೨} + ೮ಮ^{೨}ಪ^{೨} − ೧೬ಪ^{೪} − ಬ^{೪} − ಮ.

೧೯. ೧೬ಯ^{೨} − ೪ರ^{೨} − ಲ^{೨} + ೧೨ಯರ + ೪ರಲ − ೬ಲಯ.

೨೦. ೧೬ಯ^{೨} + ೬೪ಯ + ೬೩.

೨೧. ೨೧ಪ^{೨} − ೭೧ಪ − ೨೨.

೨೨. ೮೦ಜ^{೨}ಕ^{೨} − ೩೨ಜ^{೪} − ೧೮ಕ^{೪}.

೨೩. ೭೨(೨ಯ − ೩ರ)^{೨} − ೪ಯ + ೬ರ.

೨೪. ೬೪ಜ^{೪} + ೪೮ಜ^{೨} − ೪ಜ − ೩.

೨೫. ೪ನ^{೪} − ೩ನ + ೧.

೨.

ಪ^{೩} ± ಮ^{೩} ≡ (ಪ ± ಮ) (ಪ^{೨} ± ಪಮ + ಮ^{೨})

೨೬. ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೧ ಪು. ೧೨೩) **ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು − ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ)** ಮತ್ತು **ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು + ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ)** ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ ನಿಯಮದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಅದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಂಥವೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ಯ^{೩} + ೯ಯ^{೨} + ೨೭ಯ + ೯೧. ಇಲ್ಲಿ ಯ^{೩} + ೯ಯ^{೨} + ೨೭ಯ ದ ಜೊತೆಗೆ ೨೭ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಯ + ೩ ಇದರ ಘನವಾಗುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ

ಯ^3 + ೯ಯ^2 + ೨೭ಯ + ೯೧

= ಯ^3 + ೯ಯ^2 + ೨೭ಯ + ೨೭ + ೬೪

= (ಯ + ೩)^3 + (೪)^3

= (ಯ + ೩ + ೪){(ಯ + ೩)^2 − ೪(ಯ + ೩) + ೧೬}

= (ಯ + ೭)(ಯ^2 + ೬ಯ + ೯ − ೪ಯ − ೧೨ + ೧೬)

= (ಯ + ೭)(ಯ^2 + ೨ಯ + ೧೩).

ಉ. ೨. ೭ಪ^3 + ೬ಪ^{2}ಮ − ೧೨ಪಮ^2 + ೮ಮ^3

= ೮ಪ^3 − ಪ^3 + ೬ಪ^{2}ಮ − ೧೨ಪಮ^2 + ೮ಮ^3

= ೮ಪ^3 − (ಪ^3 − ೬ಪ^{2}ಮ + ೧೨ಪಮ^2 − ೮ಮ^3)

= (೨ಪ^3) − (ಪ − ೨ಮ)^3

= {(೨ಪ − (ಪ − ೨ಮ)} {೪ಪ^2 + ೨ಪ(ಪ − ೨ಮ) +
(ಪ − ೨ಮ)^2}

= (೨ಪ − ಪ + ೨ಮ)
(೪ಪ^2 + ೨ಪ^2 − ೪ಪಮ + ಪ^2 − ೪ಪಮ + ೪ಮ^2)

= (ಪ + ೨ಮ)(೭ಪ^2 − ೮ಪಮ + ೪ಮ^2).

ಉ. ೩. ೨೭ನ^3 − ೧೫ನ − ೨. ಇಲ್ಲಿ −೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು
+೮ − ೧೦ ಹೀಗೆ ಬರೆದರೆ ೨೭ನ^3 − ೧೫ನ − ೨

= ೨೭ನ^3 + ೮ − ೧೫ನ − ೧೦

= (೩ನ + ೨)(೯ನ^2 − ೬ನ + ೪) − ೫(೩ನ + ೨)

= (೩ನ + ೨)(೯ನ^2 − ೬ನ + ೪ − ೫)

= (೩ನ + ೨)(೯ನ^2 − ೬ನ − ೧).

ಉ. ೪. ೮ಯ^3 + ೮ಅಯ^2 − ೩ಅ^3.

−೩ಅ^3 ದ −ಅ^3 ಮತ್ತು −೨ಅ^3 ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ
೮ಯ^3 + ೮ಅಯ^2 − ೩ಅ^3 = ೮ಯ^3 − ಅ^3 + ೮ಅಯ^2 − ೨ಅ^3

= (೨ಯ − ಅ)(೪ಯ^2 + ೨ಅಯ + ಅ^2) + ೨ಅ(೪ಯ^2 − ಅ^2)

= (೨ಯ − ಅ)(೪ಯ^2 + ೨ಅಯ + ಅ^2) + ೨ಅ(೨ಯ − ಅ)(೨ಯ + ಅ)

= (೨ಯ − ಅ)(೪ಯ^2 + ೨ಅಯ + ಅ^2 + ೪ಅಯ + ೨ಅ^2)

= (೨ಯ − ೩ಅ)(೪ಯ^{೨} + ೬ಅಯ + ೯ಅ^{೨}).

ಉ. ೫. ಅ^{೪} − ೬ಅ − ೪. −೬ಅ ದ − ೮ಅ ಮತ್ತು +೨ಅ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅ^{೪} − ೬ಅ − ೪ = ಅ^{೪} − ೮ಅ + ೨ಅ − ೪

= ಅ(ಅ^{೩} − ೮) + ೨(ಅ − ೨)

= ಅ(ಅ − ೨)(ಅ^{೨} + ೨ಅ + ೪) + ೨(ಅ − ೨)

= (ಅ − ೨){ಅ(ಅ^{೨} + ೨ಅ + ೪) + ೨}

= (ಅ − ೨)(ಅ^{೩} + ೨ಅ^{೨} + ೪ಅ + ೨).

ಉ. ೬. ಯ^{೩} + ೪ಯ^{೨} − ೧೭ಯ − ೬೦. −೬೦ ಇದರ −೬೪ ಮತ್ತು +೪ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ

ಯ^{೩} + ೪ಯ^{೨} − ೧೭ಯ − ೬೦ = ಯ^{೩} − ೬೪ + ೪ಯ^{೨} − ೧೭ಯ + ೪

= (ಯ − ೪)(ಯ^{೨} + ೪ಯ + ೧೬) + (ಯ − ೪)(೪ಯ − ೧)

= (ಯ − ೪)(ಯ^{೨} + ೪ಯ + ೧೬ + ೪ಯ − ೧)

= (ಯ − ೪)(ಯ^{೨} − ೮ಯ + ೧೫)

= (ಯ − ೪)(ಯ + ೩)(ಯ + ೫).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ೧೨೫ಕ^{೩} − ೭೫ಕ^{೨} − ೩೦ಕ + ೮.

೨. ೮ − ೫೨ವ + ೭೮ವ^{೨} − ೨೭ವ^{೩}.

೩. ಕ^{೩} − ೩ಕ^{೨} − ೧೦ಕ + ೨೪. ೪. ನ^{೩} − ೧೪ನ^{೨} + ೬೩ನ − ೯.

೫. ೬೪ಯ^{೩} + ೮೦ಯ^{೨} − ೬೮ಯ − ೨೧.

೬. ೨೪ರ^{೩} − ೨೬ರ^{೨} + ೯ರ − ೧. ೭. ರ^{೩} − ೪೮ರ + ೧೨೮.

೮. ೨೭ಅ^{೩} − ೩೬ಅ + ೧೬. ೯. ಮ^{೩} + ೧೩ಮ^{೨} − ೧೪೪.

೧೦. ಅ^{೩} − ೯ಅ^{೨} + ೧೦೮. ೧೧. ೮ಸ^{೩} + ೮ಸ^{೨} + ೯.

೧೨. ೨೭ನ^{೩} + ೫೪ನ^{೨} − ೩೨. ೧೩. (ಅ + ಕ)^{೩} − (ಅ − ಕ)^{೩}

೧೪. (೨ಅ − ಕ)^{೩} − (ಅ − ೨ಕ)^{೩}. ೧೫. (೩ದ − ನ)^{೩} + ೨೭(ದ + ನ)^{೩}.

೧೬. ಯ^{೩} + ೨ರ^{೩} + (೨ಯ + ರ)^{೩} ೧೭. ೬೪ಶ^{೬} − ೭೨೯ಚ^{೬}.

೧೮. ಅ^{೧೨} − ಕ^{೧೨}. ೧೯. ೩೪೩ಸ^{೬}ಮ^{೩} − ೬೪ಸ^{೩}ಮ^{೯}.

೨೦. $\text{೫೧೨ಅ}^{೩}—\text{೧೨೫ಕ}^{೬}$. ೨೧. $(\text{ಪ}+\text{೩})^{೬}—\text{೭೨೯}$.

೨೨. $(\text{ನ}^{೩}—\text{೧})^{೨}—(\text{ನ}—\text{೧})^{೨}$.

೨೩. ಪ=೨·೮, ಮ=—೬ ಇದ್ದರೆ $(\text{೩ಪ}—\text{೫ಮ})^{೩}+(\text{೨ಪ}+\text{೭ಮ})^{೩}=?$

೨೪. ಅ=೫.೨, ಕ=೮.೩೫, ಗ= —೫.೨ ಇದ್ದರೆ $(\text{ಅ}+\text{೨ಕ})^{೩}$
$—(\text{೨ಕ}—\text{ಗ})^{೩}=?$

೩-

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಭ)(ಯ+ಮ)+ಕ.

೬೮. ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ನಾಲ್ಕು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಗುಣ-ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉ. ೧. (ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೪)(ಯ+೫)+೨. ಇಲ್ಲಿ (ಯ+೧) ಮತ್ತು (ಯ+೫) ಇವೆರಡರ ಮತ್ತು (ಯ+೨) ಮತ್ತು (ಯ+೪) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು ಅವೇ ಅಂದರೆ $\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}$ ಬರುವವು. ಮತ್ತು $\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}$ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅ ಈ ಆದೇಶದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕ-ರಣವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೨})(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೫})+\text{೨}$$
$$=\{(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})\}\ \{(\text{ಯ}+\text{೨})(\text{ಯ}+\text{೪})\}+\text{೨}$$
$$=(\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}+\text{೫})(\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}+\text{೮})+\text{೨}$$
$$=(\text{ಅ}—\text{೫})(\text{ಅ}+\text{೮})+\text{೨}$$
$$=\text{ಅ}^{೨}+\text{೧೩ಅ}+\text{೪೨}$$
$$=(\text{ಅ}+\text{೬})(\text{ಅ}+\text{೭})$$
$$=(\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}+\text{೭})$$

$[\therefore \text{ಅ}=\text{ಯ}^{೨}+\text{೬ಯ}$

ಉ. ೨. (ರ−೭)(ರ−೫)(ರ−೧)(ರ+೩)+೧೫. ಇಲ್ಲಿ ರ−೭ ಮತ್ತು ರ+೩ ಹಾಗೂ (ರ−೫) ಮತ್ತು ರ+೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಂಪು ರ^{೨}−೪ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ರಾಶಿಯು

= {(ರ−೭)(ರ+೩)} {(ರ+೫)(ರ+೧)} +೧೫
= (ರ^{೨}−೪ರ−೨೧)(ರ^{೨}−೪ರ−೫)+೧೫
= (ಅ−೨೧)(ಅ−೫)+೧೫ [ರ−೪ರ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಆದೇಶಿಸಿ
= ಅ^{೨}−೨೬ಅ+೧೨೦
= (ಅ−೨೦)(ಅ−೬)
= (ರ^{೨}−೪ರ−೨೦)(ರ^{೨}−೪ರ−೬) [∵ ಅ=ರ^{೨}−೪ರ

ಉ. ೩. (೩ನ−೫)(೩ನ−೨)(೩ನ+೧೦)(೩ನ+೭)−೩೭. ಇಲ್ಲಿ −೫+೧೦=೫, ಮತ್ತು −೨+೭=೫. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ೩ನ−೫ ಮತ್ತು ೩ನ+೧೦ ಹಾಗೂ ೩ನ−೨ ಮತ್ತು ೩ನ+೭ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ರಾಶಿಯು

= {(೩ನ−೫)(೩ನ+೧೦)} {(೩ನ−೨)(೩ನ+೭)} −೩೭
= (೯ನ^{೨}+೧೫ನ−೫೦) (೯ನ^{೨}+೧೫ನ−೧೪)−೩೭
= (ಅ−೫೦)(ಅ−೧೪)−೩೭ [೯ನ+೧೫ನ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಇಟ್ಟು
= ಅ^{೨}−೬೪ಅ+೬೬೩
= (ಅ−೫೧)(ಅ−೧೩)
= (೯ನ^{೨}+೧೫ನ−೫೧)(೯^{೨}ನ−೧೫ನ−೧೩)
[∵ ಅ=೯ನ^{೨}+೧೫ನ
= ೩(೩ನ^{೨}−೫ನ−೧೭)(೯ನ^{೨}−೧೫ನ−೧೩).

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಯಾವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಉ. ೪. (ಯ+೫)(ಯ+೪)(೨ಯ—೩)(೨ಯ—೧)—೧೨.
ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಯ^{೨}—ದ ಪದ ಮತ್ತು ಯ—ದ ಪದ ಇವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಆರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳು ಯ+೫ ಮತ್ತು ೨ಯ—೩ ಹಾಗೂ ಯ+೪ ೨ಯ—೧. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬಂಧ ೨ಯ^{೨}—೭ಯ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ರಾಶಿಯು = {(ಯ+೫)(೨ಯ—೩)} {(ಯ+೪)(೨ಯ—೧)} —೧೨

= (೨ಯ^{೨}+೭ಯ—೧೫)(೨ಯ^{೨}+೭ಯ—೪)—೧೨

= (ಅ—೧೫)(ಅ—೪)—೧೨ [೨ಯ^{೨}+೭ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

= ಅ^{೨}—೧೯ಅ+೪೮

=(ಅ—೧೬)(ಅ—೩)

= (೨ಯ^{೨}+೭ಯ—೧೬)(೨ಯ^{೨}—೭ಯ—೩)

[∵ ಅ=೨ಯ^{೨}+೭ಯ

ಉ. ೫. ಯ (ಯ+೫ಕ)(ಯ—ಕ)(ಯ—೬ಕ)+೧೪೪ಕ^{೪}. ಇಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ಯ—ಕ ಹಾಗೂ ಯ—೫ಕ ಮತ್ತು ಯ—೬ಕ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

ರಾಶಿಯು={ಯ (ಯ—ಕ)} {(ಯ+೫ಕ)(ಯ—೬ಕ)} +೧೪೪ಕ^{೪}

= (ಯ^{೨}—ಕಯ)(ಯ^{೨}—ಕಯ—೩೦ಕ^{೨})+೧೪೪ಕ^{೪}

= ಅ (ಅ—೩೦ಕ^{೨})+೧೪೪ಕ^{೪} [ಯ^{೨}—ಕಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಇಟ್ಟು,

= ಅ^{೨}—೩೦ಕ^{೨}ಅ+೧೪೪ಕ^{೪}

= (ಅ—೬ಕ^{೨})(ಅ—೨೪ಕ^{೨})

= (ಯ^{೨}—ಕಯ—೬ಕ^{೨})(ಯ^{೨}—ಕಯ—೨೪ಕ^{೨})

[∵ ಅ = ಯ^{೨}—ಕಯ

= (ಯ—೩ಕ)(ಯ+೨ಕ)(ಯ^{೨}—ಯಕ—೨೪ಕ^{೨}).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. (ಅ+೨)(ಅ+೬)(ಅ+೯)(ಅ+೫)+೨೦.

೨. (ವ—೩)(ವ—೪)(ವ—೨)(ವ—೬)—೩೬.

೩. (ಜ—೪)(ಜ—೨)(ಜ+೫)(ಜ+೭)+೮೦.

೪. ಪ(ಪ—೧)(ಪ+೫)(ಪ+೬)—೭೨.

೫. ಗ(ಗ+೧)(೩ಗ—೨)(೩ಗ—೫)+೪.

೬. (೪ಯ—೩)(೪ಯ—೧)(೪ಯ+೫)(೪ಯ+೭)+೫೫.

೭. ಯ(ಯ—೨ಸ)(ಯ+೪ಸ)(ಯ+೬ಸ)+೩೫ಸ^4.

೮. (೨ರ—೩ಸ)(೨ರ—ಸ)(೨ರ—೭ಸ)(೨ರ—೯ಸ)+೧೧ಸ^4.

೯. (೩ರ—೫ಕ)(೩ರ—೪ಕ)(೩ರ+ಕ)(೩ರ+೨ಕ)—೫೫ಕ^4.

ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3—೩ಪಬಮ=(ಪ+ಬ+ಮ)
(ಪ^2 + ಬ^2 + ಮ^2—ಪಬ—ಬಮ—ಮಪ)

೪.

೨೫. **ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು** ಉಣಾ ಅವೇ **ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ,** ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯಿದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 — ೩ಪಬಮ

≡ (ಪ+ಬ)^3—೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+ಮ^3—೩ಪಬಮ

≡ (ಪ+ಬ)^3+ಮ^3—೩ಪಬ(ಪ+ಬ)—೩ಪಬಮ

≡ (ಪ+ಬ+ಮ){(ಪ+ಬ)^2—ಮ(ಪ+ಬ)+ಮ^2}
—೩ಪಬ(ಪ+ಬ+ಮ)

≡ (ಪ+ಬ+ಮ)(ಪ^2+೨ಪಬ+ಬ^2—ಮಪ—ಬಮ+ಮ^2—೩ಪಬ)

≡ **(ಪ+ಬ+ಮ)(ಪ^2+ಬ^2+ಮ^2—ಪಬ—ಬಮ—ಮಪ)**

ಮೊದಲಿನೆಯ ಪಂಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಪ^3 — ಬ^3 ಇವು ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದಾದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು (ಘನಗಳ ಇದೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬಿಲ್ಲ. ಯಾವದಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬರುವದು) (ಪ+ಬ)^3—೩ಪಬ(ಪ+ಬ)

ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಕ ಮೂಲರಾಶಿಯು ಈ ಬದಲಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಘನಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡು ಘನಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ತೆಗೆಯಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೂರನೇ ಪಂಕ್ತಿ-ನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ಹೋದಂತೆ ಆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಒಂದು **ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು** ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು **ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿರುತ್ತ**-ವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ-ದೆಂದರೆ:

$$ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}—೩ಪಬಮ$$

$$\equiv(ಪ+ಬ+ಮ)\,(ಪ^{೨}+ಬ^{೨}+ಮ^{೨}—ಪಬ—ಬಮ—ಬಮ)$$

$$\equiv\frac{೧}{೨}\,(ಪ+ಬ+ಮ)(೨ಪ^{೨}+೨ಬ^{೨}+೨ಮ^{೨}—೨ಪಬ—೨ಬಮ—೨ಮಪ)$$

$$\equiv\frac{೧}{೨}\,(ಪ+ಬ+ಮ)\,\{(ಪ^{೨}—೨ಪಬ+ಬ^{೨})+(ಬ^{೨}—೨ಬಮ+ಮ^{೨})+(ಮ^{೨}—೨ಮಪ+ಪ^{೨})\}$$

$$\equiv\frac{೧}{೨}(ಪ+ಬ+ಮ)\{(ಪ—ಬ)^{೨}+(ಬ—ಮ)^{೨}+(ಮ—ಪ)^{೨}\}.$$

೨·೬. ಮೇಲಿನ ಗುಣಕಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಈಗ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. $೮ಯ^{೩}+೨೭ರ^{೩}+ಲ^{೩}—೧೮ಯರಲ$. ಇಲ್ಲಿ $೮ಯ^{೩}$ ಮತ್ತು $೨೭ರ^{೩}$ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಯ ಮತ್ತು ೩ರ ಇವುಗಳ ಘನಗಳಿದ್ದು ೧೮ಯರಲ ಇದು ೨ಯ, ೩ರ ಮತ್ತು ಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇರುವದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

$$ರಾಶಿಯು = (೨ಯ)^{೩}+(೩ರ)^{೩}+ಲ^{೩}—೩.\,೨ಯ.\,೩ರ.ಲ$$

$$= (೨ಯ+೩ರ+ಲ)$$

$$(೪ಯ^{೨}+೯ರ^{೨}+ಲ^{೨}—೬ಯರ—೩ರಲ—೨ಲಯ).$$

ಉ. ೨. $ತ^{೩}—ದ^{೩}+ನ^{೩}+೩ತದನ$. $—ದ^{೩}=+(—ದ)^{೩}$, ಮತ್ತು $೩ತದನ=—೩ತ(—ದ)ನ$.

∴ ರಾಶಿಯು $=$ ತ³ + (−ದ)³ + ನ³ − ೩ತ(−ದ)ನ

$=$ (ತ − ದ + ನ){ತ² + (−ದ)² + ನ² − ತ(−ದ) − (−ದ)ನ − ನತ}

$=$ (ತ − ದ + ನ)(ತ² + ದ² + ನ² + ತದ + ದನ − ನತ).

ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಳ ಸಂಕೋಚದ ಮೂಲಕ ಕೇವಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರು ಮೂಲರೀತಿಯನ್ನವಲಂಬಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಹಿತಕರವಾದುದು.

ಉ. ೩. ೨೧೬ಯ³ − ೬೪ರ³ − ೧೨೫ಲ³ − ೩೬೦ಯರಲ.

$=$ (೬ಯ)³ + (−೪ರ)³ + (−೫ಲ)³ − ೩·೬ಯ(−೪ರ)(−೫ಲ)

$=$ (೬ಯ − ೪ರ − ೫ಲ)

(೩೬ಯ² + ೧೬ರ² + ೨೫ಲ² + ೨೪ಯರ − ೨೦ರಲ + ೩೦ಲಯ).

ಉ. ೪. ೮ಅ³ − ೬೪ಕ³ + ೨೪ಅಕ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೮ಅ³, −೬೪ಕ³ ಮತ್ತು ೧ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಅ, −೪ಕ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಘನಗಳು

೨೪ಅಕ $=$ −೩.೨ಅ(−೪ಕ)·೧.

∴ ರಾಶಿಯು $=$ (೨ಅ)³ + (−೪ಕ)³ + (೧)³ − ೩·೨ಅ(−೪ಕ)·೧

$=$ (೨ಅ − ೪ಕ + ೧)

(೪ಅ² + ೧೬ಕ² + ೧ + ೮ಅಕ + ೪ಕ − ೨ಅ)

$=$ (೨ಅ − ೪ಕ + ೧)

(೪ಅ² + ೮ಅಕ + ೧೬ಕ² − ೨ಅ + ೪ಕ + ೧).

ಉ. ೫. ೬೪ಅ⁶ + ೧೬ಅ³ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೧೬ಅ³ ದ −೮ಅ³ ಮತ್ತು ೨೪ಅ³ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು = ೬೪ಅ⁶ − ೮ಅ³ + ೧ + ೨೪ಅ³

= (೪ಅ²)³ + (−೨ಅ)³ + (೧)³ − ೩·೪ಅ²(−೨ಅ) . ೧

= (೪ಅ² − ೨ಅ + ೧)(೧೬ಅ⁴ + ೪ಅ² + ೧ + ೮ಅ³ + ೨ಅ − ೪ಅ²)

= (೪ಅ² − ೨ಅ + ೧)(೧೬ಅ⁴ + ೮ಅ³ + ಅ² + ೨ಅ + ೧).

ಉ. ೬. ಯ³ − $\frac{೬೪}{ಯ³}$ − ೧೩. ಇಲ್ಲಿ −೧೩ ರ −೧ ಮತ್ತು −೧೨ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

ರಾಶಿಯು $= ಯ^{೩} - \frac{೬೪}{ಯ^{೩}} - ೮ - ೨೪$

$= (ಯ)^{೩} + \left(-\frac{೪}{ಯ}\right)^{೩} + (-೨)^{೩} - ೩ಯ\left(-\frac{೪}{ಯ}\right)(-೨)$

$= \left(ಯ - \frac{೪}{ಯ} - ೨\right)\left(ಯ^{೨} + \frac{೧೬}{ಯ^{೨}} + ೪ + ೪ - \frac{೮}{ಯ} + ೨ಯ\right)$

$= \left(ಯ - ೨ - \frac{೪}{ಯ}\right)\left(ಯ^{೨} + ೨ಯ + ೮ - \frac{೮}{ಯ} + \frac{೧೬}{ಯ^{೨}}\right).$

ಉ. ೭. $(ಯ+ರ-ಲ)^{೩}+(ರ+ಲ-ಯ)^{೩}+(ಲ+ಯ-ರ)^{೩}$ $-೩(ಯ+ರ-ಲ)(ರ+ಲ-ಯ)(ಲ+ಯ-ರ)$ ಕ್ಕೆ $(ಯ+ರ+ಲ)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಏನು ಬರುವದು ?

ಭಾಜ್ಯ $= \frac{೧}{೨}\{(ಯ+ರ-ಲ)+(ರ+ಲ-ಯ)+(ಲ+ಯ-ರ)\}$

$\times \left[\{(ಯ+ರ-ಲ)-(ರ+ಲ-ಯ)\}^{೨} + \{(ರ+ಲ-ಯ)-(ಲ+ಯ-ರ)\}^{೨} + \{(ಲ+ಯ-ರ)-(ಯ+ರ-ಲ)\}^{೨}\right]$

$= \frac{೧}{೨}(ಯ+ರ+ಲ)\{(೨ಯ-೨ಲ)^{೨}+(೨ರ-೨ಯ)^{೨}+(೨ಲ-೨ರ)^{೨}\}$

$= \frac{೧}{೨}(ಯ+ರ+ಲ)\{೪(ಯ-ಲ)^{೨}+೪(ರ-ಯ)^{೨}+೪(ಲ-ರ)^{೨}\}$

$= ೨(ಯ+ರ+ಲ)\{(ಯ-ಲ)^{೨}+(ರ-ಯ)^{೨}+(ಲ-ರ)^{೨}\}$

$= ೪(ಯ+ರ+ಲ)(ಯ^{೨}+ರ^{೨}+ಲ^{೨}-ಯರ-ರಲ-ಲಯ)$

$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ $= ೪(ಯ^{೨}+ರ^{೨}+ಲ^{೨}-ಯರ-ರಲ-ಲಯ)$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

೧. $ಅ^{೩} + ಕ^{೩} - ಗ^{೩} + ೩ಅಕಗ$. ೨. $ತ^{೩} - ದ^{೩} - ನ^{೩} - ೩ತದನ$.

೩. ಯ^{೩} + ೮ರ^{೩} + ಲ^{೩} − ೬ಯರಲ.　　೪. ೮ಯ^{೩} + ೨೭ರ^{೩} + ೧೨೫ಲ^{೩} − ೯೦ಯರಲ.

೫. ೬೪ತ^{೩} − ದ^{೩} + ೮ನ^{೩} + ೨೪ತದನ.

೬. ೧೨೫ಕ^{೩} − ೮ಗ^{೩} − ಫ^{೩} − ೩೦ಕಗಫ.

೭. ೮ಙ^{೩} + ೨೭ಕ^{೩} + ೧೮ಙಕ − ೧.

೮. ೬೪ಙ^{೩} − ೧೨೫ಕ^{೩} − ೧೨೦ಙಕ − ೮.

೯. ೮ಪ^{೬} + ೯೯ಪ^{೩} − ೬೪.　　೧೦. ಯ^{೬} + ೨೬ಯ^{೩} + ೧೨೫.

೧೧. ಯ^{೩} − ರ^{೩} + $\frac{೧}{೨೭}$ಸ^{೩} + ಯರಸ.

೧೨. ೮ಸ^{೩} − $\frac{೧}{೨೭}$ಬ^{೩} − $\frac{೧}{೮}$ಮ^{೩} − ಸಬಮ.

೧೩. ಕ್ಷ^{೩} + $\frac{೧}{ಕ್ಷ^{೩}}$ − ೨.　　೧೪. ಪ^{೩} + $\frac{೮}{ಪ^{೩}}$ + ೬.

೧೫. ೮ಪ^{೩} − $\frac{೨೭}{ಪ^{೩}}$ − ೫೪.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು

೧.

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩೧. ಮುಂದಿನ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

$$\text{ಯ} - \text{ಪ})\ \text{ಅಯ}^3 + \text{ಕಯ}^2 + \text{ಗಯ} + \text{ಘ}\ (\text{ಅಯ}^2 + \text{ಯ}(\text{ಅಪ} + \text{ಕ}) + (\text{ಅಪ}^2 + \text{ಕಪ} + \text{ಗ})$$

$$\text{ಅಯ}^3 - \text{ಅಪಯ}^2$$

$$(\text{ಅಪ} + \text{ಕ})\text{ಯ}^2 + \text{ಗಯ}$$

$$(\text{ಅಪ} + \text{ಕ})\text{ಯ}^2 - (\text{ಅಪ}^2 + \text{ಕಪ})\text{ಯ}$$

$$(\text{ಅಪ}^2 + \text{ಕಪ} + \text{ಗ})\text{ಯ} + \text{ಘ}$$

$$(\text{ಅಪ}^2 + \text{ಕಪ} + \text{ಗ})\text{ಯ} - (\text{ಅಪ}^3 + \text{ಕಪ}^2 + \text{ಗಪ})$$

$$\text{ಅಪ}^3 + \text{ಕಪ}^2 + \text{ಗಪ} + \text{ಘ}$$

ಇಲ್ಲಿ **ಭಾಜ್ಯ** [ಮೂಲ ರಾಶಿಯು] ಮತ್ತು **ಶೇಷ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಲಿಕೆ ನಮಗೆ ಕಾಣಬರುವದೇನೆಂದರೆ **ಭಾಜ್ಯ**ದಲ್ಲಿ **ಯ** ದ ಬದಲಾಗಿ **ಪ** ಇಟ್ಟರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯು ಬರುವದೋ ಅದೇ **ಶೇಷ**ವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಹೊರಡುವ ನಿಷ್ಕರ್ಷವೇನೆಂದರೆ **ಯ** ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ ಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವು ೧ ಇರುವಂಥ ಅದೇ ವರ್ಣದ, **ಯ — ಪ** ದ ಸ್ವರೂಪದ, ಪ್ರಥಮ ಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಎಷ್ಟುಳಿಯುವದನ್ನಷ್ಟೇ ನಮಗೆ ನೋಡುವದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೆ ಕೇವಲ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ **ಯ** ದ ಬದಲಾಗಿ **ಪ** ವನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ ಶೇಷವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರಬೇಕು. ಇದರ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಒಂದೆರಡು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ನೋಡುವಾ.

$೨ಕ್ಷ^{೩} + ೭ಕ್ಷ^{೨} - ೪ಕ್ಷ + ೫$ ಇದನ್ನು $ಕ್ಷ - ೩$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$ಕ್ಷ - ೩$) $೨ಕ್ಷ^{೩} + ೭ಕ್ಷ^{೨} - ೪ಕ್ಷ + ೫$ ($೨ಕ್ಷ^{೨} + ೧೩ಕ್ಷ + ೩೫$

$೨ಕ್ಷ^{೩} - ೬ಕ್ಷ^{೨}$

$೧೩ಕ್ಷ^{೨} - ೪ಕ್ಷ$

$೧೩ಕ್ಷ^{೨} - ೩೯ಕ್ಷ$

$೩೫ಕ್ಷ + ೫$

$೩೫ಕ್ಷ - ೧೦೫$

೧೧೦

ಈಗ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ದ ಬದಲಾಗಿ ೩ ಇಟ್ಟರೆ ಭಾಜ್ಯದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$ಕ್ಷ = ೩$ ಇದ್ದರೆ ಭಾಜ್ಯವು $= ೨.೩^{೩} + ೭.೩^{೨} - ೪.೩ + ೫$

$= ೫೪ + ೬೩ - ೧೨ + ೫ = ೧೧೦$. ಮೇಲೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಶೇಷ ಬಂದಿದೆಯೆಂದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

೩·೨. ಈಗ ಇದು ಹೀಗೇ ಏಕೆ ಆಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ.

ಭಾಜಕ) ಭಾಜ್ಯ (ಭಾಗಾಕಾರ

....

ಶೇಷ

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಇದೊಂದು **ನಿತ್ಯಸಮವಿರು**ತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $೨ಕ್ಷ^{೩} + ೭ಕ್ಷ^{೨} - ೪ಕ್ಷ + ೫ =$ $(ಕ್ಷ - ೩) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಕ್ಷ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಿರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷ ದ ಬೆಲೆಯು ೩ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $೨.೩^{೩} + ೭.೩^{೨} - ೪.೩ + ೫$ $= (೩ - ೩) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ $= ೦ \times$ ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ.

∴ ಶೇಷ = ೨·೩^{೩} + ೭·೩^{೨} − ೪·೩ + ೫

= ೫೪ + ೬೩ − ೧೨ + ೫ = ೧೧೦.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಅಯ^{೩} + ಕಯ^{೨} + ಗಯ + ಘ = (ಯ − ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಯ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಿರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟರೆ,

ಅಪ^{೩} + ಕಪ^{೨} + ಗಪ + ಘ = (ಪ − ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ

= ೦ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ = ಶೇಷ.

ಈ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಣದ) ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ಬೇಕಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ವನ್ನು ಇಟ್ಟು ದೊರಕಿದ ಬೆಲೆಯೇ ಯ−ಪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವಿರುವದು. ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ **ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ**ವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಇದರ ಉಪಯೋಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಉತ್ಸಾಹವಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಿಸಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಉ. ೧. ೫ಕ್ಷ^{೩} − ೪ಕ್ಷ^{೨} + ೨ಕ್ಷ − ೧ ಇದನ್ನು ಕ್ಷ − ೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ **ಶೇಷ**ವೆಷ್ಟು ?

ಶೇಷ = ೫·೪^{೩} − ೪·೪^{೨} + ೨·೪ − ೧ = ೩೨೦ − ೬೪ + ೮ − ೧ = **೨೬೩.**

ಉ. ೨. ೩ಕ್ಷ^{೩} + ೨ಕ್ಷ^{೨} − ೫ಕ್ಷ − ೬ ಇದನ್ನು ಕ್ಷ + ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ **ಶೇಷ**ವೆಷ್ಟು? ಇಲ್ಲಿ **ಭಾಜಕ** = ಕ್ಷ + ೨ = ಕ್ಷ − (−೨). ಆದುದರಿಂದ **ಭಾಜ್ಯ**ದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ −೨ನ್ನು ಇಡಬೇಕು.

∴ ಶೇಷ = ೩(−೨)^{೩} + ೨(−೨)^{೨} − ೫(−೨) − ೬ = −೨೪ + ೮ +

೧೦ − ೬ = **−೧೨.**

ಇಲ್ಲಿ ಕ್ಷದ ಬದಲಾಗಿ −೨ನ್ನು ಏಕೆ ಇಡಲಿಕ್ಕೆಬೇಕು ಎಂಬುದು ಮುಂದಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ೩ಕ್ಷ^{೩} + ೨ಕ್ಷ^{೨} − ೫ಕ್ಷ − ೬

$=$ (ಕ್ಷ$+$೨)$\times$ **ಭಾಗಾಕಾರ**$+$**ಶೇಷ.** ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ$+$೨ $=$೦ ಇದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ ಕ್ಷ$= -$೨ ಇರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ (ಕ್ಷ$+$೨)$\times$ **ಭಾಗಾಕಾರ** ಈ ಭಾಗವು ಇಲ್ಲದ ಹಾಗೆ ಆಗಿ ಅಲ್ಲಿ **ಶೇಷ** ಮಾತ್ರ ಉಳಿಯುವದು. ಆ ಮೇಲೆ ಶೇಷವು $೩(-೨)^{೪}+೨(-೨)^{೨}-೫(-೨)-೬$ ಇರುವದು.

ಆದುದರಿಂದ **ಶೇಷ** ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮುಖ್ಯ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಭಾಜಕ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅದರೊಳಗಿನ ವರ್ಣದ ಯಾವ ಬೆಲೆಯು ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ಆ ವರ್ಣದ ಬದಲಾಗಿ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು.

ಉ. ೩. $೨ನ^{೪}-ನ^{೩}+೨ನ^{೨}+೪ನ+೩$ ಇದನ್ನು $ನ+೩$ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ **ಶೇಷ**ವೆಷ್ಟು?

$$\text{ಶೇಷ} = ೨(-೩)^{೪}-(-೩)^{೩}+೨(-೩)^{೨}+೪(-೩)+೩$$

$$= ೧೬೨+೨೭+೧೮-೧೨+೩=೧೯೮.$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ **ಶೇಷ**ವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧. $೪ಅ^{೩}-೫ಅ^{೨}-೭ಅ+೩$ ಭಾಗಿಲೆ $ಅ-೨$.

೨. $೩ಅ^{೪}-೨ಅ^{೨}+೪ಅ-೫$ ಭಾಗಿಲೆ $ಅ+೨$.

೩. $೮ಕ್ಷ^{೩}-೪ಕ್ಷ^{೨}+೬ಕ್ಷ-೭$ ಭಾಗಿಲೆ $ಕ್ಷ+೩$.

೪. $೯ಯ^{೩}-೨ಯ^{೨}+೬ಯ+೪$ ಭಾಗಿಲೆ $ಯ-೩$.

೫. $ಕ್ಷ^{೪}-೭ಕ್ಷ^{೩}-ಕ್ಷ^{೨}+೫ಕ್ಷ-೧$ ಭಾಗಿಲೆ $ಕ್ಷ-೪$.

೬. $ಯ^{೫}-೪ಯ^{೩}+೭ಯ^{೨}+೨$ ಭಾಗಿಲೆ $ಯ-೨$.

೭. $ವ^{೩}-೨ವ^{೨}+೫ವ-೧೮$ ಭಾಗಿಲೆ $ವ+೪$.

೮. $೭ಕ್ಷ^{೫}+೮ಕ್ಷ^{೪}-೭ಕ್ಷ+೩$ ಭಾಗಿಲೆ $ಕ್ಷ+೨$.

೯. $ರ^{೩}+೭ರ^{೨}-೪ರ-೧$ ಭಾಗಿಲೆ $ರ-೫$.

೧೦. $೨ಅ^{೩}-ಅ^{೨}-೧೦ಅ+೨$ ಭಾಗಿಲೆ $ಅ+೫$.

೨.

ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩.೩. ಮೇಲೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ **ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ** ಉಪಯೋಗವೇನೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ.

ಯ³ − ೧೦ಯ² + ೩೧ಯ − ೩೦ ಇದನ್ನು ಯ − ೩ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ **ಶೇಷ**ವೆಷ್ಟು? ಶೇಷ = ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೩ ಹಿಡಿದು ಬರುವ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು = ೩³ − ೧೦·೩² + ೩೧·೩ − ೩೦ = ೨೭ − ೯೦ + ೯೩ − ೩೦ = ೦· ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಇದ್ದದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಗೆ ಯ − ೩ ಇಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು, ಅಂದರೆಯೇ ಯ − ೩ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು. ೩ ಇಂದ ೧೫ ಕ್ಕೆ ನಿಃಶೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು, ೩ ಇದು ೧೫ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದೆಂಬುದೇ ಇದರ ಅರ್ಥವು. ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ೪ ಇಂದ ೧೫ ಕ್ಕೆ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ೪ ಇದು ೧೫ ರ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದರಿಂದ ಯ − ೩ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂದು ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲದೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಯ − ೬ ಇದು ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೋ ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ಯ − ೬ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು = ೬³ − ೧೦·೬² + ೩೧·೬ − ೩೦ = ೨೧೬ − ೩೬೦ + ೧೮೬ − ೩೦ = ೧೨ ಇರುವದರಿಂದ ರಾಶಿಗೆ ಯ − ೬ ಇಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಅದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ ಎಂದು ಸಹ ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

೩·೪. ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯ − ೩ ಇದು ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಕಾರಣ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ − ೩ ಬರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಯ³ − ೧೦ಯ² + ೩೧ಯ − ೩೦
= ಯ³ − ೨ಯ² − ೮ಯ² + ೧೬ಯ + ೧೫ಯ − ೩೦
= ಯ²(ಯ − ೨) − ೮ಯ(ಯ − ೨) + ೧೫(ಯ − ೨)
= (ಯ − ೨)(ಯ² − ೮ಯ + ೧೫)
= (ಯ − ೨)(ಯ − ೩)(ಯ − ೫).

೩೫. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದೇನೆಂದರೆ **ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆಬೇರೆ ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟು ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ − ಪ ದಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಹೋಗುವದು. ಅಂದರೆಯೇ ಯ − ಪ ಇದು ಅದರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು.**

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ **ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು** ಪ್ರಸಿದ್ಧಿ ಇದೆ.

ಉ. ೧. ೨ನ³ − ೧೫ನ² + ೨೨ನ + ೧೫ ಇದರ ನ − ೩ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದೊ? ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಯ ಬೇರೆ ಗುಣಕಗಳಾವವು?

ನ ದ ಬದಲಾಗಿ ೩ ಇಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು = ೨·೨೭ − ೧೫·೯ + ೨೨·೩ + ೧೫ = ೫೪ − ೧೩೫ + ೬೬ + ೧೫ = ೦, ಆದ್ದರಿಂದ ನ − ೩ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದ್ದಿರಬೇಕು. ಇನ್ನು ಉ. ದ ಮೇಲೆ ನ − ೩ ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಕ ಬರುವಂತೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಾಂಡಿ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

೨ನ³ − ೧೫ನ² + ೨೨ನ + ೧೫
= ೨ನ³ − ೬ನ² − ೯ನ² + ೨೭ನ − ೫ನ + ೧೫
= ೨ನ²(ನ − ೩) − ೯ನ(ನ − ೩) − ೫(ನ − ೩)
= (ನ − ೩)(೨ನ² − ೯ನ − ೫)
= (ನ − ೩)(ನ − ೫)(೨ನ + ೧).

ಉ. ೨. ಕ್ಷ³ + ಕ್ಷ² − ೧೪ಕ್ಷ − ೨೦ ಇದರಲ್ಲಿ ಕ್ಷ + ೨ ಗುಣಕವಿರುವದೊ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಕ್ಷ + ೨ ಇದರ ಗುಣಕವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕ್ಷ ದ ಬದಲಾಗಿ −೨ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು =(−೨^{೩})+(−೨)^{೨}−೧೪(−೨)−೩೦=−೮+೪+೨೮−೩೦=−೬ ಅಂದರೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕ್ಷ+೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು −೬ ಉಳಿಯುವದು. ಆದುದ-ರಿಂದ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಅದರ ಗುಣಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ

ಕ್ಷ^{೩}+೨ಕ್ಷ^{೨}−೧೪ಕ್ಷ−೩೦+೬=ಕ್ಷ^{೩}+ಕ್ಷ^{೨}−೧೪ಕ್ಷ−೨೪

=ಕ್ಷ^{೩}+೨ಕ್ಷ^{೨}−ಕ್ಷ^{೨}−೨ಕ್ಷ−೧೨ಕ್ಷ−೨೪

=ಕ್ಷ^{೨}(ಕ್ಷ+೨)−ಕ್ಷ(ಕ್ಷ+೨)−೧೨(ಕ್ಷ+೨)

=(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ^{೨}−ಕ್ಷ−೧೨)

=(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೩)(ಕ್ಷ+೪).

ಉ. ೩ ಯ^{೨}−೭ಯ+ಕ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ−೨ ರಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ರಾಶಿಯನ್ನು ಯ −೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು =೨^{೨}−೭·೨+ಕ=೪−೧೪+ಕ = −೧೦+ಕ. ಕ ದ ಬೆಲೆಯು **೧೦** ಇದ್ದರೆ ಈ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯವಿರುವದು, ಅಂದರೆ ಯ−೨ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

[ತಾಳೆ: ಯ^{೨}−೭ಯ+೧೦=(ಯ−೨)(ಯ−೫) .]

ಉ. ೪. ಅ ಮತ್ತು ಕ ಇವುಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ೨ಯ^{೩}−೧೧ಯ^{೨}+ಅಯ+ಕ ಕ್ಕೆ ಯ−೩ ಮತ್ತು ಯ−೪ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ಯ−೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು=೨.೩^{೩}−೧೧.೩^{೨}+೩ಅ+ಕ=೫೪−೯೯+೩ಅ+ಕ=೩ಅ+ಕ−೪೫.

ಯ−೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು=೨·೪^{೩}−೧೧.೪^{೨}+೪ಅ+ಕ=೧೨೮−೧೭೬+೪ಅ+ಕ=೪ಅ+ಕ−೪೮.

∴ ಯ−೩ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೩ಅ+ಕ−೪೫=೦, ಅಂದರೆ

೩ಅ+ಕ=೪೫. (೧)

ಮತ್ತು, ಯ−೪ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೪ಅ+ಕ−೪೮=೦ ಅಂದರೆ

೪ಅ+ಕ=೪೮, (೨) ಇರಲೇಬೇಕು. ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಅ=೩ ಮತ್ತು ಕ=೩೬ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಗೆ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ತರುವಾಯ ಹೊಸ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. $ಯ^{3} - ೮ಯ^{2} - ೪ಯ + ೯೮; ಯ + ೨$.

೨. $೪ವ^{3} - ೧೬ವ^{2} + ೯ವ + ೯; ವ - ೩$.

೩. $೩ಕ್ಷ^{3} - ೧೬ಕ್ಷ^{2} + ೨೩ಕ್ಷ - ೬; ಕ್ಷ - ೩$.

೪. $ವ^{3} - ೩ವ^{2} - ೩೪ವ + ೧೦೦; ವ - ೪$.

೫. $ಯ^{3} + ೫ಯ^{2} - ೨ಯ - ೨೦; ಯ + ೪$.

೬. $೪ರ^{3} - ೮ರ^{2} - ೫೫ರ - ೪೦; ರ - ೫$.

೭. $೫ಕ್ಷ^{2} + ೨೭ಕ್ಷ + ಕ$ ಕ್ಕೆ $ಕ್ಷ - ೮$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಕ=?

೮. $೧೦ಯ^{3} - ೨೧ಯ^{2} + ಅಯ + ೪$ ಕ್ಕೆ $ಯ - ೨$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಅ = ?

೯. $೩ಸ^{3} - ೮ಸ^{2} + ಅಸ + ಕ$ ಕ್ಕೆ $ಸ + ೪$ ಮತ್ತು $ಸ - ೭$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ ಅ = ? ಕ = ?

೧೦. $೭ಕ್ಷ^{4} + ೬ಕ್ಷ^{3} - ೪೦ಕ್ಷ^{2} + ಅಕ್ಷ + ಕ$ ಕ್ಕೆ $ಕ್ಷ - ೨$, $ಕ್ಷ + ೩$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?

೧೧. $ಪ^{4} + ಅಪ^{3} - ೪೯ಪ^{2} + ಕಪ + ೬೦$ ಕ್ಕೆ $ಪ - ೪$, $ಪ - ೫$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ ?

೧೨. $ಅಯ^{4} + ೪ಯ^{3} + ಕಯ^{2} + ೩೨ಯ - ೧೫$ ಕ್ಕೆ $ಯ - ೧$, $ಯ + ೫$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೩.

ಕೆಲವು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ

.... = (ಯ—೧)(....) ; .... = (ಯ+೧)(....) : = ... (....)

೩·೬. ಮೇಲೆ ವಿವೇಚಿಸಿದ **ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ** ಮೇಲಿಂದ ಗುಣಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಪ್ರಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಬರುವದು. ಅವು ಹೀಗೆ ಎಂದರೆ ಅಯ^{೪}+ಕಯ^{೩}+ಖಯ^{೨}+ಗಯ+ಘ ದಂಥ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಯ—ದ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ದ ಇಟ್ಟು ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಅದರಂತೆಯೇ ಯ—೧ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಈಗ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ+ಕ+ಖ+ಗ+ಘ ಆಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಅ+ಕ+ಖ+ಗ+ಘ=೦ ಇದ್ದರೆ ಯ-೧ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅ,ಕ,ಖ,ಗ, ಘ ಇವು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳವೆ. (ಘ ಅಂದರೆ ಘಯ^{೦}, ಅಂದರೆ ಘ ಇದು ಯ ದ ಸಹ ಗುಣಕವಿರುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.) ಆದುದರಿಂದ,

ನಿಯಮ ೧. **ಯ ದ (ಇಲ್ಲಿವೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಎಲ್ಲ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಶೂನ್ಯವಿದ್ದರೆ ಯ-೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯು ಗುಣಕವಿರುವದು, ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ.**

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೮ಕ್ಷ^{೩}—೬ಕ್ಷ^{೨}—೨೩ಕ್ಷ+೨೧ ಇವರಲ್ಲಿ ೮—೬—೨೩+೨೧=೦, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ—೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಲಿಕ್ಕೇಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

೮ಕ್ಷ^{೩}—೬ಕ್ಷ^{೨}—೨೩ಕ್ಷ+೨೧

=೮ಕ್ಷ^{೩}—೮ಕ್ಷ^{೨}+೨ಕ್ಷ^{೨}—೨ಕ್ಷ—೨೧ಕ್ಷ+೨೧

=೮ಕ್ಷ^{೨}(ಕ್ಷ—೧)+೨ಕ್ಷ(ಕ್ಷ—೧)—೨೧(ಕ್ಷ—೧)

= (ಕ್ಷ − ೧)(೮ಕ್ಷ^{೨} + ೨ಕ್ಷ − ೨೧)
= (ಕ್ಷ − ೧)(೨ಕ್ಷ − ೩)(೪ಕ್ಷ + ೭).

೩೭. ಈಗ ಅಯು^{೪} + ಕಯು^{೩} + ಖಯು^{೨} + ಗಯು + ಘ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ + ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದು; ಮತ್ತು ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ −೧ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ(−೧)^{೪} + ಕ(−೧)^{೩} + ಖ(−೧)^{೨} + ಗ(−೧) + ಘ, ಅಂದರೆ ಅ − ಕ + ಖ − ಗ + ಘ ಆಗುವದು. ಆದರಿಂದಲೇ ಯ + ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, ಅ − ಕ + ಖ − ಗ + ಘ = ೦. ಅಂದರೆ ಅ + ಖ + ಘ = ಕ + ಗ.

ಇಲ್ಲಿ ಅ, ಖ, ಘ ಇವು ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿದ್ದು, ಕ, ಗ ಇವು ವಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿರ್ಣಯವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ನಿಯಮ ೨. **ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಇವು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ ಯ + ೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಇರದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ.** ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೬ಕ್ಷ^{೩} + ೧೩ಕ್ಷ^{೨} + ೨ಕ್ಷ − ೫ ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು = ೧೩ − ೫ = ೮, ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು = ೬ + ೨ = ೮ ಇರುವದರಿಂದ ಕ್ಷ + ೧ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದು ತಿಳಿದೊಡನೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

೬ಕ್ಷ^{೩} + ೧೩ಕ್ಷ^{೨} + ೨ಕ್ಷ − ೫
= ೬ಕ್ಷ^{೩} + ೬ಕ್ಷ^{೨} + ೭ಕ್ಷ^{೨} + ೭ಕ್ಷ − ೫ಕ್ಷ − ೫
= ೬ಕ್ಷ^{೨}(ಕ್ಷ + ೧) + ೭ಕ್ಷ(ಕ್ಷ + ೧) − ೫(ಕ್ಷ + ೧)
= (ಕ್ಷ + ೧)(೬ಕ್ಷ^{೨} + ೭ಕ್ಷ − ೫)
= (ಕ್ಷ + ೧)(೨ಕ್ಷ − ೧)(೩ಕ್ಷ + ೫).

೩.೮. ಅಯ^{೪} + ಕಯ^{೩} + ಖಯ^{೨} + ಗಯ + ಘ ಈ ರಾಶಿಯು ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಅದು ಅದರ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅಯ^{೪} + ... ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಅಂದರೆ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು. ಮತ್ತು ನಯ + ಪ ದ ಬೆಲೆಯು ನ + ಪ ಇರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೇನೆಂದರೆ, ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಯ^{೪} + ಕಯ^{೩} + ಖಯ^{೨} + ಗಯ + ಘ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ನ + ಪ ಇದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣಕವಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆಯೇ ಆ ಬೇರೀಜಿಗೆ (ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಕ್ಕೆ) ನ + ಪ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆಯೇ ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು. ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಮಹತ್ವದ ನಿಯಮವು ಯಾವುದೆಂದರೆ **ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೇ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಯಾವ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದೇ ದ್ವಿಪದಿಯು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು, ಬೇರೆ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ.**

ನಿಯಮ ೩.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಈ ನಿಯಮವು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡುವಾ.

ಉ.೧. ಯ^{೩} + ೫ಯ^{೨} — ೨ಯ — ೨೪ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಗಳ ಬೇರೀಜು ≠ ೦, ಆದುದರಿಂದ ಯ — ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ≠ ವಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆದುದರಿಂದ ಯ + ೧ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಪದ ೨೪ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಯವಗಳು ೨, ೩, ೪.... ಇರುವವು. ಆದುದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಯ + ೨, ಯ — ೨, ಯ + ೩, ಯ — ೩, ಯ + ೪, ಯ — ೪ ಹೀಗೆ ಅವಯವಗಳು

ಸಂಭವಿಸುವವು. ಈಗ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪರೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವಾ.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು — ೨೦ ಇರುತ್ತದೆ. ಯ+೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ೩. —೨೦ ಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೨ ಇದು ಅವಯವವಿರಲಾರದು.

ಯ—೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು —೧. ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಂಭಂಧವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ=೨ ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಅದು ಇದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯ=೨ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು $=೨^{೩}+೫\cdot೨^{೨}-೨\cdot೨-೨೪=೮+೨೦-೪-೨೪=೦$. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ—೨ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ+೩ ಇರಬಹುದೆ? ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ೪. ೪ರಿಂದ—೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೩ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ= —೩ ಎಂದು ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಅದು ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಯ= —೩ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು =
$(-೩)^{೩}+೫(-೩)^{೨}-೨(-೩)-೨೪=-೨೭+೪೫+೬-೨೪=೦$.
ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ+೩ ಇದಾದರೂ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಈಗ ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಘಾತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಯ—ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಮೂರೇ ಗುಣಕಗಳಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಗುಣಕ ಯ—೨ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಯ+೩ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ $ಯ^{೩}$ ಇದ್ದು ಕೊನೆಯದು—೨೪ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯದು ಯ+೪ ಇದ್ದೇ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದರ ಹೊರತು ಬೇರೆ ಇರಲಾರದು. ಅದೇ ಇದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಾತ್ರಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ=—೪ ಹಾಕಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$ಯ=-೪ \text{ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು } =(-೪)^{೩}+೫(-೪)^{೨}-೨(-೪)-೨೪=-೬೪+೮೦+೮-೨೪=೦.$$

∴ ಯ^{3} + ೫ಯ^{2} − ೨ಯ − ೨೪ = (ಯ + ೨)(ಯ + ೩)(ಯ + ೪).

ಮೇಲಿನ ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದನಂತರ ಮೇಲಿನಂತೆ ದೀರ್ಘವಾದ ಮತ್ತು ವೇಳೆಯು ಬಹಳ ತಗಲುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದೇ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬಿಡಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವೂ, ಸುಲಭವೂ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ − ೨ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದ ತರುವಾಯ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

ಯ^{3} + ೫ಯ^{2} − ೨ಯ − ೨೪

= ಯ^{3} − ೨ಯ^{2} + ೭ಯ^{2} − ೧೪ಯ + ೧೨ಯ − ೨೪

= ಯ^{2}(ಯ − ೨) + ೭ಯ(ಯ − ೨) + ೭ಯ(ಯ − ೨)

+ ೧೨ (ಯ − ೨)

= (ಯ − ೨) (ಯ^{2} + ೭ಯ + ೧೨)

[ಈ ವರ್ಗತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಕ್ಷಣವೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು]

= (ಯ − ೨) (ಯ + ೩) (ಯ + ೪).

ಉ.೨. ೬ಕ್ಷ^{4} − ೫ಕ್ಷ^{3} − ೩೯ಕ್ಷ^{2} − ೪ಕ್ಷ + ೧೨ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ≠ ೦, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ − ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು (−೨೧) ≠ ವಿಷಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು (−೯). ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ + ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದರ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಕ್ಷ + ೨ ಇರಬಹುದೇ? ಇದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೩. ರಾಶಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು − ೩೦, ಇದಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದಮೇಲೆ ಕ್ಷ + ೨ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಕ್ಷ = − ೨ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಕ್ಷ $=$ −೨ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು

$= ೬(-೨)^{೪} - ೩೯(-೨)^{೨} - ೪(-೨) + ೧೨$

$= ೯೬ + ೪೦ - ೧೫೬ + ೮ + ೧೨ = ೦.$

ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ+೨ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದು ನಿಶ್ಚಿತ. ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷ−೨, ಕ್ಷ+೩, ಕ್ಷ−೩ ಇವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರೆ ಕ್ಷ−೨ ಮತ್ತು ಕ್ಷ+೩ ಇವು ಗುಣಕಗಳಲ್ಲ; ಕ್ಷ−೩ ಇದು ಇರುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯು

$= ೬ಕ್ಷ^{೪} + ೧೨ಕ್ಷ^{೩} - ೧೭ಕ್ಷ^{೩} - ೩೪ಕ್ಷ^{೨} - ೫ಕ್ಷ^{೨} - ೧೦ + ೬ಕ್ಷ + ೧೨$

$= ೬ಕ್ಷ^{೩}(ಕ್ಷ+೨) - ೧೭ಕ್ಷ^{೨}(ಕ್ಷ+೨) - ೫ಕ್ಷ(ಕ್ಷ+೨) + ೬(ಕ್ಷ+೨)$

$= (ಕ್ಷ+೨)(೬ಕ್ಷ^{೩} - ೧೭ಕ್ಷ^{೨} - ೫ಕ್ಷ + ೬)$

$= (ಕ್ಷ+೨)(೬ಕ್ಷ^{೩} - ೧೮ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ^{೨} - ೩ಕ್ಷ - ೨ಕ್ಷ + ೬)$

$= (ಕ್ಷ+೨)\{೬ಕ್ಷ^{೨}(ಕ್ಷ-೩) + ಕ್ಷ(ಕ್ಷ-೩) - ೨(ಕ್ಷ-೩)\}$

$= (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ-೩)(೬ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ - ೨)$

$= (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ-೩)(೨ಕ್ಷ-೧)(೩ಕ್ಷ+೨).$

ಉ.೩. $೬ಕ್ಷ^{೪} + ೭ಕ್ಷ^{೩} - ೭೩ಕ್ಷ^{೨} + ಅಕ್ಷ + ಕ$ ಕ್ಕೆ $ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ - ೧೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ=?, ಕ=?.

$ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ - ೧೨ = (ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ+೪)$. ಆದುದರಿಂದ $ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ - ೧೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಕ್ಷ−೩ ರಿಂದಾದರೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಮತ್ತು ಕ್ಷ+೪ ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಈಗ ಕ್ಷ−೩ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ=೩ ಇದ್ದರೆಯೇ ರಾಶಿಯು=೦.

$\therefore ೬.೩^{೪} + ೭.೩^{೩} - ೭೩.೩^{೨} + ೩ಅ + ಕ = ೦$

$\therefore ೪೮೬ + ೧೮೯ - ೬೫೭ + ೩ಅ + ಕ = ೦$

$\therefore ೧೮ + ೩ಅ + ಕ = ೦$

$\therefore ೩ಅ + ಕ = -೧೮ \dots \dots \dots (೧)$

ಇದರಂತೆಯೇ ಕ್ಷ+೪ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ=−೪ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು=೦

$\therefore ೬(-೪)^{೪} + ೭(-೪)^{೩} - ೭೩(-೪)^{೨} - ೪ಅ + ಕ = ೦$

∴ ೧೫೩೬ − ೪೪೮ − ೧೧೬೮ − ೪ಅ + ಕ = ೦

∴ −೮೦ − ೪ಅ + ಕ=೦

∴ ೪ಅ − ಕ= −೮೦.... ....(೩)

(೧) ಮತ್ತು (೩) ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ೭ಅ= −೯೮, ಅಂದರೆ ಅ= −೧೪, ಮತ್ತು ಆದುದರಿಂದ ಕ=೨೪.

ಅ= −೧೪, ಕ= ೨೪.

೩೯. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಏಕಚಿಹ್ನವಿರುವ ೬ಯ^{೪} + ೩೭ಯ^{೩} + ೭೩ಯ^{೨} + ೫೩ಯ + ೧೨ ದಂತಹ ಸ್ವರೂಪದ ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವು ಅಯ − ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಭಿನ್ನ ಚಿಹ್ನ (ಒಂದರ ಚಿಹ್ನ + ಬೇರೊಂದರ −) ಪದಗಳಿರುವ ದ್ವಿಪದಿಯು ಇರಲಾರದು; ಅದು ಅಯ + ಗ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಏಕಚಿಹ್ನ ಪದಗಳದ್ದೇ ಇರುವದು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಯ − ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅಯ=ಪ, ಅಂದರೆ ಯ= $\frac{ಪ}{ಅ}$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆದರೆ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಧನ (+) ಇದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅದರೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಬೆಲೆಯು ಧನವಿದ್ದುದರಿಂದ, ಎಂದಿಗೂ ಶೂನ್ಯವಿರಲಾರದು, ಆದರೆ ಅದು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಇರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಗುಣಕಗಳಾವವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾತನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. ರ^{೩} + ೨ರ^{೨} − ೪೩ರ + ೪೦.

೨. ಲ^{೩} + ೧೩ಲ^{೨} + ೪೭ಲ + ೩೫.

೩. ೬ಅ^{೩} + ೫ಅ^{೨} − ೨೧ಅ + ೧೦.

೪. ೧೨ಪ^{೩} + ೨೩ಪ^{೨} + ೬ಪ − ೫.

೫. ೪ರ^{೩} − ೭ರ^{೨} + ೨ರ + ೧.

೬. ೬ರ^{೩} + ೧೯ರ^{೨} + ೨೦ರ + ೭.

೭. ಕ್ಷ^{೪} + ೭ಕ್ಷ^{೩} + ೯ಕ್ಷ^{೨} − ೭ಕ್ಷ − ೧೦.

೮. ೨೫ಅ^{೪} − ೫೦ಅ^{೩} + ೯ಅ^{೨} + ೩೨ಅ − ೧೬.

೯. ೧೫ಯ^{೪} + ೭ಯ^{೩} − ೧೯ಯ^{೨} − ೭ಯ + ೪.

೧೦. ೬ಅ^{೪} + ೫ಅ^{೩} − ೨೮ಅ^{೨} + ೨೭ಅ − ೧೦.

೧೧. ೯ಕ್ಷ^{೪} − ೧೨ಕ್ಷ^{೩} − ೫ಕ್ಷ^{೨} + ೧೨ಕ್ಷ − ೪.

೧೨. ಕ್ಷ^{೩} − ೬ಕ್ಷ^{೨} − ೧೫ಕ್ಷ + ೧೦೦.

೧೩. ಯ^{೪} − ೧೦ಯ^{೩} + ೩೫ಯ^{೨} − ೫೦ಯ + ೨೪.

೧೪. ಕ್ಷ^{೩} − ೬ಕ್ಷ^{೨} − ಕ್ಷ + ೩೦.

೧೫. ೨ನ^{೩} − ೧೧ನ^{೨} + ೧೨ನ − ೯.

೧೬. ೪ಯ^{೨} − ೨೭ಯ − ೨೨.

೧೭. ೪ನ^{೨} − ೫೧ನ + ೧೩೫.

೧೮. ೬ಕ್ಷ^{೪} + ೧೭ಕ್ಷ^{೩} − ೬೫ಕ್ಷ^{೨} + ೪ಕ್ಷ + ೨೦.

೧೯. ೪ಯ^{೪} + ಅಯ^{೩} − ೨೧ಯ + ಕ ಕ್ಕೆ ಯ^{೨} + ಯ + ೬ ಇಂದ ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೨೦. ನ^{೪} + ೮ನ^{೩} + ಅನ^{೨} + ಕನ − ೨೪ ಕ್ಕೆ ನ^{೨} + ೨ನ − ೩ ಇಂದ ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೨೧. ಅನ^{೪} − ೧೬ನ^{೩} − ೨೯ನ^{೨} + ಕನ + ೮ ಕ್ಕೆ ನ^{೨} − ೩ನ − ೪ ಇಂದ ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೨೨. ಅಕ್ಷ^{೪} − ೧೯ಕ್ಷ^{೩} − ೩೭ಕ್ಷ^{೨} + ೬೨ಕ್ಷ + ಕ ಕ್ಕೆ ಕ್ಷ^{೨} − ೨ಕ್ಷ − ೮ ಇಂ ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೨೩. ೮ಕ್ಷ^{೪} + ಅಕ್ಷ^{೩} − ೧೭ಕ್ಷ^{೨} + ಕಕ್ಷ + ೯ ಕ್ಕೆ ಕ್ಷ^{೨} − ೧ ಇಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ?, ಕ = ?.

೪.

೩.೧೧. **ಸಮಕೋಟಿ** ಇಲ್ಲವೆ **ಸಮಘಾತ** (Homogeneous) ರಾಶಿಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
ಯ + ಕ್ಷ, ಯ − ಕ್ಷ, ಪ + ಬ + ಮ, ೨ಪ + ಬ − ಮ, ಪ − ಬ + ೪ಮ,

$ಪ^೨+ಬ^೨$, $ಪ^೨-ಮ^೨$, $೪ಯ^೨-೨ಯಕ್ಷ+೫ಕ್ಷ^೨$, $ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨$
$+೨ಪಬ+೨ಬಮ+೨ಮಪ$,

$ಯ^೩+ರ^೩+ಲ^೩$ ೩ಯರಲ, $ಪ^೩-೩ಪ^೨ಬ+೩ಪ^೨ಬ-ಬ^೩$.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮ್ಯವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ? ಅದು ಎಂತಹದು? ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದವು ಇರುವವು. ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು (Degree) ಎರಡು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಮೂರು ಇರುವದು.

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಒಂದೇ ಇರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ **ಸಮಕೋಟಿ** ಇಲ್ಲವೆ **ಸಮಘಾತ** ರಾಶಿಗಳು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು **ಏಕಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು** ಇದ್ದು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ದ್ವಿಕೋಟಿಕ** ಮತ್ತು **ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು** ಇರುತ್ತವೆ.

$ಯ^೩+ರ^೩+$ ಅಯರ ಇದು ಯ, ರ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳಿಂದಾದ **ತ್ರಿಕೋಟಿ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿ** ಇರುವದು. ಆದರೆ ರಾಶಿಯು ಕೇವಲ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ವರ್ಣಗಳದ್ದೇ ಇದ್ದು ಅ ಇದು ಯರ ದ ಒಂದು ಸಹಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದು ಸಮಘಾತವಲ್ಲ.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಘಾತವೇ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋಟಿಯು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಕೋಟಿಗಳ ಜೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೩.೧೨. **ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ** ಇಲ್ಲವೆ **ಸಂಮಿತ** (Symmetrical) ರಾಶಿಗಳು.

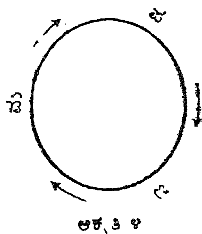
ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಣಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲು ಆಗುವದಿಲ್ಲವೋ, ಆ ರಾಶಿಯು ಆ ವರ್ಣಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ

ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಇಲ್ಲದ ಸಂಮಿತವಿದೆಯೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ+ಮ, ಪ^{೨}+ಮ^{೨}, ಪ^{೨}−೨ಪಮ+ಮ^{೨}, ೪ಪ^{೩}+೭ಪ^{೨}ಮ+೭ಪಮ^{೨}+೪ಮ^{೩} ಈ ರಾಶಿಗಳು ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ **ಸಮ-ಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು.** ಯ+ರ+ಲ, ಯ^{೨}+ರ^{೨}+ಲ^{೨}, ಯರ+ರಲ+ಲಯ, ಯ^{೩}+ರ^{೩}+ಲ^{೩}−೩ಯರಲ ಇವು ಯ,ರ,ಲ ಗಳ ವಿಷಯ-ಗಳಲ್ಲಿ **ಸಮಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು.** ಅ (ಪ+ಬ+ಮ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ಏಕಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ರೂಪ-ವಿದ್ದು ಅ (ಪ^{೨}+ಬ^{೨}+ಮ^{೨})+ಕ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯು ಮತ್ತು ಅ(ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}) + ಕ(ಪ^{೨}ಬ+ಪಬ^{೨}+ಬ^{೨}ಮ+ಬಮ^{೨}+ಮ^{೨}ಪ+ಮಪ^{೨})+ ಗಪಬಮ ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯು ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅ,ಕ,ಗ ಇವು ಯಾವುದಾದರೂ ಜ್ಞಾತ ಸಹಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಿಕ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿದ್ದರೂ ಪ,ಬ,ಮ ಈ ಮೂರು ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡರ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಪ್ರಮಾ-ಣವೇ ಇರುವದು.

೩.೧೩. ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳು.

ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ, ಪ(ಬ−ಮ) +ಬ(ಮ−ಪ)+ಮ(ಪ−ಬ), ಪ^{೨}(ಬ−ಮ)+ಬ^{೨}(ಮ−ಪ) +ಮ^{೨}(ಪ−ಬ), ಪಬ(ಪ−ಬ)+ ಬಮ(ಬ−ಮ)+ಮಪ(ಮ−ಪ), ಪ^{೩}(ಬ+ಮ)+ಬ^{೩}(ಮ+ಪ)+ ಮ^{೨}(ಪ+ಬ) ಇಂತಹ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಾವ್ರ


ಆಕೃತಿ ೪

ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು. ಮತ್ತು ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ಬ, ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ

ಮ ಮತ್ತು ಮ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಬರೆದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೂ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಹಿಂದಿನ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುಲದ ಸುತ್ತಲೂ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಓದಿದರೆ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವು ಒಂದರ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಬಂದಿರುವವೋ ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅವು ಬಂದಿರುವವು. ಪ ದ ನಂತರ ಬ, ಬ ದ ನಂತರ ಮ, ಮ ದ ನಂತರ ಪ, ಇದು ಅವುಗಳ ಕ್ರಮವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ ಈ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಣಗಳು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮಂಡಿಸುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ **ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವೆಂದು** ಸಂಜ್ಞೆಇದ್ದು ಈ ತರಹದ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ **ಚಕ್ರೀಯ** ರಾಶಿಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದೇ **ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ** ಯ ಒಂದು ಪದವು ತಿಳಿದರೆ ನಮಗೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $ಯ(ರ^2 - ವ^2)$ + ... + ... ಈ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಇದ್ದ ಎರಡು ಪದಗಳು ಯಾವವು ಇರಬೇಕೆಂಬುವದನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಪದಗಳ ರಚನೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ರಾಶಿಯು $ಯ(ರ^2 - ವ^2) + ರ(ವ^2 - ಯ^2) + ವ(ಯ^2 - ರ^2)$ ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೩.೧೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಉ. ೧. $ಪ^2(ಬ - ಮ) + ಬ^2(ಮ - ಪ) + ಮ^2(ಪ - ಬ)$ ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:— ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ವರ್ಣದ ಘಾತಗಳ ಏರಿಕೆಯ ಇಲ್ಲವೆ ಇಳಿತದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅವಯವಗಳನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ರಾಶಿಯು $= ಪ^{೨}(ಬ-ಮ) + ಬ^{೨}ಮ - ಪಬ^{೨} + ಮ^{೨}ಪ - ಬಮ^{೨}$

$= ಪ^{೨}(ಬ-ಮ) - ಪ(ಬ^{೨}-ಮ^{೨}) + ಬಮ(ಬ-ಮ)$

$= (ಬ-ಮ)\{ಪ^{೨} - ಪ(ಬ+ಮ) + ಬಮ\}$

$= (ಬ-ಮ)(ಪ^{೨} - ಪಬ - ಪಮ + ಬಮ)$

$= (ಬ-ಮ)\{ಪ(ಪ-ಬ) - ಮ(ಪ-ಬ)\}$

$= (ಬ-ಮ)(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)$

$= -(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ) \quad [\because ಪ-ಮ = -(ಮ-ಪ)]$

ಅವಯವಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವದು ಒಳ್ಳೆಯದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಬರೆದಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:— ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ಬ ಇಟ್ಟರೆ ಆದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದಂತೆ ಪ—ಬ ಇದೊಂದು ಅವಯವವಿದೆ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಹಿಡಿದರೂ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮ—ಪ ಇವಾದರೂ ಅವಯವಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವಿದೆ. ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಒಂದು ಅವಯವವು ಪ—ಬ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯದು ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು ಮ—ಪ ಇರಲೇಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಬೇರೆ ಗುಣಕವು ಇರಲಾರದು, ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅದು ಅ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ,

$ಪ^{೨}(ಬ-ಮ) + ಬ^{೨}(ಮ-ಪ) + ಮ^{೨}(ಪ-ಬ)$

$\equiv ಅ(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)$ ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಇದ್ದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜ ಇರುವದು.

$ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ $೦ + ೧(೨-೦) + ೪(೦-೧) = ಅ(೦-೧)(೧-೨)(೨-೦)$

$\therefore ೨-೪ = ೨ಅ$, ಅಂದರೆ $೨ಅ = -೨, \therefore ಅ = -೧$

$\therefore ಪ^{೨}(ಬ-ಮ) + ಬ^{೨}(ಮ-ಪ) + ಮ^{೨}(ಪ-ಬ) \equiv$

$-(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ).$

ಉ. ೨. ಪಬ(ಪ^{೨}—ಬ^{೨})+ಬಮ(ಬ^{೨}—ಮ^{೨})+ಮಪ(ಮ^{೨}—ಪ^{೨}). ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:-

ರಾಶಿಯು = ಪ^{೩}ಬ—ಪಬ^{೩}+ಬಮ(ಬ^{೨}—ಮ^{೨})+ಮ^{೩}ಪ—ಮಪ^{೩}

= ಪ^{೩}ಬ—ಮಪ^{೩}—ಪಬ^{೩}+ಮ^{೩}ಪ+ಬಮ(ಬ^{೨}—ಮ^{೨})

= ಪ^{೩}(ಬ—ಮ)—ಪ(ಬ^{೩}—ಮ^{೩})+ಬಮ(ಬ^{೨}—ಮ^{೨})

= (ಬ—ಮ){ಪ^{೩}—ಪ(ಬ^{೨}+ಬಮ+ಮ^{೨})+ಬಮ(ಬ+ಮ)}

= (ಬ-ಮ)(ಪ^{೩}-ಪಬ^{೨}-ಪಬಮ-ಪಮ^{೨}+ಬ^{೨}ಮ+ಬಮ^{೨})

= (ಬ-ಮ)(ಬ^{೨}ಮ-ಪಬ^{೨}+ಬಮ^{೨}-ಪಬಮ—ಪಮ^{೨}+ಪ^{೩})

= (ಬ—ಮ){ಬ^{೨}(ಮ—ಪ)+ಬಮ(ಮ—ಪ)— ಪ(ಮ^{೨}—ಪ^{೨})}

= (ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ{ಬ^{೨}+ಬಮ—ಪ(ಮ+ಪ)}

= (ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)(ಬ^{೨}—ಪ^{೨}+ಬಮ—ಪಮ)

= (ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ{(ಬ+ಪ)(ಬ—ಪ)+ಮ(ಬ—ಪ)}

= (ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)(ಬ—ಪ)(ಬ+ಪ+ಮ)

= —(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ(ಮ—ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ)

[∵ ಬ—ಪ = —(ಪ—ಬ)

* ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ ದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ಬ—ಮ ಈ ಅವಯವ ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಪ ದ ಹೊರತೂ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಣದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವು. ಆದರಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಬ,ದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:— ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ=ಬ, ಬ=ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=ಪ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ—ಮ, ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮ—ಪ ಈ ಅವಯವಗಳು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಚತುಷ್ಕೋಟಿಕ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯ-ವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಏಕಕೋಟಿಕ ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ಇಂಥ

ಗುಣಕವು ಪ+ಬ+ಮ ಇದು ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಈಗ ಇದರ ಹೊರತೂ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವೂ ಇರಬಹುದು. ಅದು ಕ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ

$$ಪಬ(ಪ^{೨}-ಬ^{೨})+ಬಮ(ಬ^{೨}-ಮ^{೨})+ಮಪ(ಮ^{೨}-ಪ^{೨})$$
$$= ಕ(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ)$$

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ $೦+೧\cdot೨(೧-೪)+೦=ಕ(-೧)(೧-೨)(೨)(೧+೨)$

$\therefore -೬=೬ಕ;$ ಅಂತೆ $ಕ=-೧.$

$$\therefore ಪಬ(ಪ^{೨}-ಬ^{೨})+ಬಮ(ಬ^{೨}-ಮ^{೨})+ಮಪ(ಮ^{೨}-ಪ^{೨})$$
$$= -(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ).$$

ಉ.೩. $ಯ^{೨}(ರ-ಲ)^{೩}+ರ^{೨}(ಲ-ಯ)^{೩}+ಲ^{೨}(ಯ-ರ)^{೩}$ ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$$ರಾಶಿಯು = ಯ^{೨}(ರ-ಲ^{೩})+ರ^{೨}(ಲ^{೩}-೩ಲ^{೨}ಯ+೩ಲಯ^{೨}-ಯ^{೩})$$
$$+ಲ^{೨}(ಯ^{೩}-೩ಯ^{೨}ರ+೩ಯರ^{೨}-ರ^{೩})$$
$$= -ಯ^{೩}(ರ^{೨}-ಲ^{೨})+ಯ^{೨}(ರ-ಲ)^{೩}+$$
$$೩ಯ^{೨}ರಲ(ರ-ಲ)-ರ^{೨}ಲ^{೨}(ರ-ಲ)$$
$$= (ರ-ಲ)\{-ಯ^{೩}(ರ+ಲ)+ಯ^{೨}(ರ-ಲ)^{೨}+$$
$$೩ಯ^{೨}ರಲ-ರ^{೨}ಲ^{೨}\}$$
$$= (ರ-ಲ)\{-ಯ^{೩}ರ-ಯ^{೩}ಲ+ಯ^{೨}(ರ^{೨}-೨ರಲ+ಲ^{೨}$$
$$+೩ಯ^{೨}ರಲ-ರ^{೨}ಲ^{೨}\}$$
$$= (ರ-ಲ)\{-ರ^{೨}(ಲ^{೨}-ಯ^{೨})+ಯ^{೨}ರ(ಲ-ಯ)+$$
$$ಯ^{೨}ಲ(ಲ-ಯ)\}$$
$$= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)\{-ರ^{೨}(ಲ+ಯ)+ಯ^{೨}ರ+ಯ^{೨}ಲ\}$$
$$= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)\{ಲ(ಯ^{೨}-ರ^{೨})+ಯರ(ಯ-ರ)\} \quad *$$
$$= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)\{ಲ(ಯ+ರ)+ಯರ\}$$
$$= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)(ಯರ+ರಲ+ಲಯ).$$

* ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ರ - ಲ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ರ ದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆ ಮಾಡಿ ಲ — ಯ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತಕೂಡಲೇ ಮುಂದಿನ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಲ ದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಮಂಡಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಒಮ್ಮೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವರ್ಣವನ್ನು ತಿರುಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಮೊದಲು ಯ ದ, ತರುವಾಯ ರ ದ, ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಲ ದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಇದೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ = ರ, ಇಲ್ಲವೆ ರ = ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಲ = ಯ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ — ರ, ರ — ಲ ಮತ್ತು ಲ — ಯ ಈ ಅವಯವಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಈ ಅವಯವವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ಪಂಚಕೋಟಿಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಯ,ರ,ಲ ಗಳೊಳಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಅವಯವವು ಇದಿರಬೇಕು. ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯರೂಪವು ಅ(ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಲ^{೨}) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ) ಇದು ಇರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, ಯ^{೨}(ರ — ಲ)^{೩} + ರ^{೨}(ಲ — ಯ)^{೩} + ಲ^{೨}(ಯ — ರ)^{೩} ≡ (ಯ — ರ)(ರ — ಲ)(ಲ — ಯ)

{ಅ(ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಲ^{೨}) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ)}.

ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಯ,ರ,ಲ ಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಯ=೦, ರ=೧, ಲ=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ೮ — ೪೨=(೫ಅ + ೨ಕ), ಮತ್ತು
ಯ= —೧, ರ=೦, ಲ=೧ ಹಿಡಿದರೆ—೧ — ೧ = ೨(೨ಅ — ಕ),
ಅಂ. ೨ಅ — ಕ = ೧. ∴ ಅ=೦, ಕ=೧.

∴ ಯ^{೨}(ರ — ಲ)^{೩} + ರ^{೨}(ಲ — ಯ)^{೩} ≡ (ಯ—ರ)(ರ — ಲ)(ಲ — ಯ)

(ಯರ + ರಲ + ಲಯ),

ಉ. ೪. ಪ^{೨}(ಬ + ಮ) + ಬ^{೨}(ಮ + ಪ) + ಮ^{೨}(ಪ + ಬ) + ೨ಪಬಮ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ರಾಶಿಯು $= ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಪ(ಬ^{೨}-೨ಬಮ+ಮ^{೨})+ಬಮ(ಬ+ಮ)$

$= ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಪ(ಬ+ಮ)^{೨}+ಬಮ(ಬ+ಮ)$

$= (ಬ+ಮ)\{ಪ^{೨}+ಪ(ಬ+ಮ)+ಬಮ\}$

$= (ಬ+ಮ)\{ಪ(ಪ+ಬ)+ಮ(ಪ+ಬ)\}$

$= (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).$

ಇಲ್ಲವೆ $ಪ=-ಬ$, ಇಲ್ಲವೆ $ಬ=-ಮ$, ಇಲ್ಲವೆ $ಮ=-ಪ$ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $ಪ+ಬ$, $ಬ+ಮ$ ಮತ್ತು $ಮ+ಪ$ ಇವು ಗುಣಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ $ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಬ^{೨}(ಮ+ಪ)+ಮ^{೨}(ಪ+ಬ)\equiv ಅ(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)$ ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. $ಪ=೦$, $ಬ=೧$ ಮತ್ತು $ಮ=೨$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ

$೨+೪=ಅ\times೧\times೩\times೨$ ಅಂ. $೬ಅ=೬$, ಅಂ. $ಅ=೧$. ಆದುದರಿಂದ

$$ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಬ^{೨}(ಮ+ಪ)+ಮ^{೨}(ಪ+ಬ)\equiv(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).$$

ಉ.೫. $(ಪ-ಬ)^{೩}+(ಬ-ಮ)^{೩}+(ಮ-ಪ)^{೩}$ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$ಪ=ಬ$, ಇಲ್ಲವೆ $ಬ=ಮ$, ಇಲ್ಲವೆ $ಮ=ಪ$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದರಿಂದ $ಪ-ಬ$, $ಬ-ಮ$, ಮತ್ತು $ಮ-ಪ$ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಈ ಮೂರು ಏಕ ಕೋಟಿಕ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿದ್ದು-ದರಿಂದ ಇನ್ನಾವದೂ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ.

$(ಪ-ಬ)^{೩}+(ಬ-ಮ)^{೩}+(ಮ-ಪ)^{೩}$

$\equiv ಅ(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)$. ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ-೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, −೧−೧+೮
=ಅ(−೧)(−೧)೨, ∴ಅ·೨=೬, ∴ಅ=೩.

∴ **(ಪ−ಬ)^{೩}+(ಬ−ಮ)^{೩}+(ಮ−ಪ)^{೩}≡೩(ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)(ಮ−ಪ).**

ಉ.೬. (ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}−ಪ^{೩}−ಬ^{೩}−ಮ^{೩} ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಪ=−ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ=−ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=−ಪ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ+ಬ, ಬ+ಮ, ಮತ್ತು ಮ+ಪ ಇವು ಅವಯವಗಳಿರುವವು. ಅವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಯಾವ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರಲಾರವು. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ

(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}−ಪ^{೩}−ಬ^{೩}−ಮ^{೩}≡ಅ(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ). ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, ೨೭−೧−೮=ಅ·೧.೩·೨,
∴ಅ·೬=೧೮, ∴ಅ=೩.

∴ **(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}−ಪ^{೨}−ಬ^{೨}−ಮ^{೨}≡೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).** ಹಿಂದೆ ಪು. ೨೫, ೨೬ ಗಳ ಮೇಲೆ **(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)** ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ **ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ**

(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}−ಪ^{೩}−ಬ^{೩}−ಮ^{೩}≡ ೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ.೭. ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಬ^{೨}(ಮ+ಪ)+ಮ^{೨}(ಪ+ಬ)+೩ಪಬಮ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಯು= ಪ^{೨}(ಬ+ಮ)+ಪಬಮ+ಬ^{೨}(ಮ+ಪ)+ಪಬಮ
+ಮ^{೨}(ಪ+ಬ)+ಪಬಮ

= ಪ{ಪ(ಬ + ಮ) + ಬಮ} +
ಬ{ಬ(ಮ + ಪ) + ಪಮ} + ಮ{ಮ(ಪ + ಬ) + ಪಬ}
= ಪ(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ) + ಬ(ಬಮ + ಬಪ + ಪಮ)
+ ಮ(ಮಪ + ಮಬ + ಪಬ)
= ಪ(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ) + ಬ(ಪಮ + ಬಮ + ಮಪ) +
ಮ(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ)[ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಬರೆಯಲಾಗಿ]
= (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ).

ಮೇಲಿನ ೧—೭ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಹಳ ಮಹತ್ವವವು ಮತ್ತು ಉಪಯುಕ್ತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಬಹಳ ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಯಾವಾಗಲೂ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಬಹಳ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯರ(ಯ − ರ) + ರಲ(ರ − ಲ) + ಲಯ(ಲ − ಯ).

೨. ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಬಮ(ಬ + ಮ) + ಮಪ(ಮ + ಪ) + ೨ಪಬಮ.

೩. ತ(ದ − ಸ^{೨}) + ದ(ಸ^{೨} − ತ^{೨}) + ಸ(ತ^{೨} − ದ^{೨}).

೪. ಯ^{೨}(ಪ − ಮ) + ಪ^{೨}(ಮ − ಯ) + ಮ^{೨}(ಯ − ಪ).

೫. ಯ(ರ + ಲ)^{೨} + ರ(ಲ + ಯ)^{೨} + ಲ(ಯ + ರ)^{೨} − ೪ಯರಲ.

೬. (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ) − ಪಬಮ.

೭. ಪ(ಬ^{೩} − ಮ^{೩}) + ಬ(ಮ^{೩} − ಪ^{೩}) + ಮ(ಪ^{೩} − ಬ^{೩}).

೮. ಪ(ಬ − ಮ)^{೩} + ಬ(ಮ − ಪ)^{೩} + ಮ(ಪ − ಬ)^{೩}.

೯. ಪ^{೩}(ಬ − ಮ) + ಬ^{೩}(ಮ − ಪ) + ಮ^{೩}(ಪ − ಬ).

೧೦. ಯ^{೪}(ರ − ಲ) + ರ^{೪}(ಲ − ಯ) + ಲ^{೪}(ಯ − ರ).

೧೧. (ಪ^{೨} − ಬ^{೨})(ಬ^{೩} − ಮ^{೩}) + (ಮ^{೨} − ಬ^{೨})(ಪ^{೩} − ಬ^{೩}).

೧೨. ಯ^{೩}(ರ − ಲ)^{೩} + ರ^{೩}(ಲ − ಯ)^{೩} + ಲ^{೩}(ಯ − ರ)^{೩}.

೧೩. (ಯ^{೨} − ರ^{೨})^{೩} + (ರ^{೨} − ಲ^{೨})^{೩} + (ಲ^{೨} − ಯ^{೨})^{೩}.

೧೪. (ಯ^{೨} + ರ^{೨})ಲ + (ಯ + ರ)(ಯರ + ಲ^{೨}) + ೩ಯರಲ.

೧೫. $ಯ+ರ$, $ರ+ಲ$, $ಲ+ಯ$,

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದಿಯು ಶೂನ್ಯವಿದ್ದರೆ $ಯ^{೨}(ರ+ಲ)+ರ^{೨}(ಲ+ಯ)+ಲ^{೨}(ಯ+ರ)+೨ಯರಲ$ ಈ ರಾಶಿಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

೪·೧. ಬಹಳ ಸುಲಭವಿರುವ ರಾಶಿಗಳ **ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ** ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ **ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವನ್ನು** ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಎರಡನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಂಟನೆಯ ಮತ್ತು ಒಂಭತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೬೫—೧೮೧) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇಂದು ಉಜಳಣಿಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಮಾಡಿ ಅದೇ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜಳಣಿ

೪·೨. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ **ವಿಭಾಜಕವು** ಮತ್ತು, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗೆ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ **ವಿಭಾಜ್ಯವು.** ಸಹಜವಾಗಿಯೇ **ವಿಭಾಜಕವಿದು** ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ **ಗುಣವಿರುವದು**, ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯು ಅದರ **ವಿಭಾಜ್ಯದ** ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ.

೪·೩. ಅಯ ಕ್ಕೆ ಯ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ **ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ.** ಮತ್ತು, ಅದರಿಂದ ಕಯ ಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದ್ದಾದರೂ **ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ.** ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಎರಡಕ್ಕೂ ಭಾಗಹೋಗುವದರಿಂದ ಅದು ಎರಡರ **ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ**ವಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವದು,** ಪ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣ**ವಿರುವದು ಮತ್ತು ಪಯ ವಾದರೂ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣ**ವಿರುವದು. ಆದರೆ ಈ ಮೂರೂ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣ**ಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ **ವಿಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿ**) ಪಯ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು **ಅಪಯ** ಮತ್ತು **ಕಪಯ** ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** (**ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ**)ಇರುತ್ತದೆ.

೪·೪. ಅಕಯ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಅಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ **ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವದು,** ಮತ್ತು ಕಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದ್ದಾದರೂ **ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವದು,** ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಅದು ಎರಡರ **ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ**ವಿರುವದು.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದ ಅಕಪಯ ಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಅಕಪಯ ಇದು ಅವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ** ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವದು. ಆದರೆ ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವು-ಗಳಿಂದ ಅಕಪಯ ಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದರಂತೆಯೇ ಅವು-ಗಳಿಂದ ೨ ಅಕಪಯ, ೩ ಅಕಪಯ, ೪ ಅಕಪಯ, ನಅಕಪಯ, ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೆಂದರೆ ಅಕಪಯ ದ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಅಕಪಯ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆ ಅದರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಇರುವಂಥ ರಾಶಿಯು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ**ವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಅನಂತ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ **ಅಕಪಯ** ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದು, ಆದುದರಿಂದ ಅದು **ಅಪಯ** ಮತ್ತು **ಕಪಯ** ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.(ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ) .**

೪·೫. ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು **ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ** ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಮಹತ್ತಮ ಅಪವರ್ತಕ** ಮತ್ತು **ಲಘುತಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ** ಎಂದು ಸಂಜ್ಞೆಗಳಿವೆ. **ಅಪವರ್ತಕ ಅಂ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ** ಮತ್ತು **ಅಪವರ್ತ್ಯ** ಅಂ. **ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ.**

೪·೬. ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳು ಯಾವವು ಮತ್ತು ಆ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ **ಮಹತ್ತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಹೋಗುವವದೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ **ಲಘುತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಅವುಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೋಡುವದರಿಂದ ನಾವು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$೩೦ಅ^{೪}ಕ^{೩}ಯ$ ಮತ್ತು $೨೪ಅ^{೩}ಕ^{೫}ಯ^{೩}$ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ $ಅ^{೩}$, $ಕ^{೩}$ ಮತ್ತು ಯ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ, ಕ ಮತ್ತು ಯ ಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೬ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು. ಆದುದರಿಂದ $೬ಅ^{೩}ಕ^{೩}ಯ$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ $ಅ^{೪}$, $ಕ^{೫}$ ಮತ್ತು $ಯ^{೩}$ ಇವು ಅ, ಕ ಮತ್ತು ಯ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೧೨೦ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಆದುದರಿಂದ $೧೨೦ಅ^{೪}ಕ^{೫}ಯ^{೩}$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

$೯ಅ^{೪}ಪಕ್ಷ^{೩}$, $೧೨ಅ^{೩}ಯ^{೫}ಕ್ಷ^{೪}$ ಮತ್ತು $೧೮ಅ^{೩}ಪ^{೩}ಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೫}$ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, $ಅ^{೩}$ ಇದು ಅವರ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಪ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, ಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ, ಆದರೆ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, $ಕ್ಷ^{೩}$ ಇದು ಕ್ಷ ದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಮತ್ತು ೯, ೧೨ ಮತ್ತು ೧೮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ೩, ಆದುದರಿಂದ $೩ಅ^{೩}ಕ್ಷ^{೩}$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ $ಅ^{೪}$, $ಪ^{೩}$, $ಯ^{೫}$ ಮತ್ತು $ಕ್ಷ^{೫}$ ಇವು ಅ, ಪ, ಯ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೩೬ ಇದು ೯, ೧೨ ಮತ್ತು ೧೮ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದ್ದುದರಿಂದ $೩೬ಅ^{೪}ಪ^{೩}ಯ^{೫}ಕ್ಷ^{೫}$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯುವದೆಂದರೆ ಅಂಕ ಗುಣಕಗಳ ಪೃಥ ಭಾಜಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಣ್ಣ ಘಾತವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೇ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಕಗುಣಕಗಳಿಂದ ಭಾಗ-ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೇ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೭. (ಉಜಳಣಿ)

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೋದ ವರುಷ ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೇವಲ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವಿವೆ.)

೧. $೪ಅ^{೨}ಕ^{೪}ಮ^{೬}$; $೧೦ಅ^{೨}ಕಮ^{೭}$.

೨. $೮ಅ^{೨}ಪಯ^{೫}$; $೨೦ಅಕ^{೩}ಪ^{೨}ಮ$.

೩. $೨೭ಯ^{೫}ರ^{೨}ಲ^{೪}ಕ್ಷ$; $೨೦ಯ^{೨}ರ^{೩}ಕ್ಷ^{೨}$.

೪. $೨೫ಯ^{೨}ರ^{೪}ಲ^{೩}$. $೩೫ಅ^{೩}ರ^{೨}ಲ^{೪}$.

೫. $೨೨ಕ^{೩}ಗ^{೫}ಘ^{೨}$; $೩೩ಅ^{೨}ಗ^{೪}ಘ^{೨}ಮ$.

೬. $೧೭ಅಪ^{೪}ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೩}$; $೧೩ಕಪ^{೩}ಯಕ್ಷ^{೫}$.

೭. $೭ವ^{೨}ಸ^{೪}ಕ್ಷ^{೩}$; $೩೨ಯ^{೩}ವ^{೩}ಸ^{೪}ಕ್ಷ^{೨}$.

೮. $೧೦ಅಪ^{೩}ಕ್ಷ^{೨}$; $೧೫ಅ^{೨}ಪಕ್ಷ^{೩}$; $೨೦ಅ^{೩}ಪ^{೨}ಕ್ಷ^{೨}$.

೯. $೬ಪ^{೨}ಬ^{೩}ಯ^{೨}$; $೧೮ಪ^{೩}ಬಯ^{೨}ರ$; $೨೭ಬ^{೨}ಯರ^{೨}$.

೧೦. $೧೪ಅ^{೩}ಕ^{೨}ಪಮ^{೪}$; $೨೧ಅ^{೨}ಕ^{೨}ಪ^{೩}ಮ^{೩}$; $೧೦ಅ^{೨}ಪ^{೨}ಮ$.

೧೧. $೨೪ಕ^{೩}ಗ^{೩}ಬ^{೪}ಮ^{೨}$; $೧೬ಕ^{೨}ಬ^{೩}ಮ^{೩}$; $೧೮ಪ^{೪}ಬ^{೩}ಮ^{೨}$.

೧೨. $೮ಅ^{೪}ಯ^{೨}ರ^{೩}$; $೧೨ಅ^{೨}ಯ^{೫}$; $೬ಯ^{೩}ರ$; $೧೬ಯ^{೪}ಲ$.

೨.

೪·೭. ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ, ಬಹಳ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ನೋಡಿ ಹೇಳಲು ಬರುವವು. ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳು ಏಕಪದವಿಲ್ಲದೇ ಇದ್ದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವವು ಮತ್ತು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕೇವಲ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ನೋಡುವದರಿಂದ ಅವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವವು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $ಅ^೨+೨ಅಕ+ಕ^೨$ ಮತ್ತು $ಅ^೨-ಕ^೨$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, $ಅ^೨+೨ಅಕ+ಕ^೨ \equiv (ಅ+ಕ)^೨$ ಮತ್ತು $ಅ^೨-ಕ^೨ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)$ ಇರುವ ಸಂಗತಿಯು ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದರಿಂದ $ಅ+ಕ$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು $(ಅ+ಕ)^೨(ಅ-ಕ)$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಅದರಂತೆಯೇ $ಅ^೩+ಕ^೩$ ಮತ್ತು $ಅ^೪+ಅ^೨ಕ^೨+ಕ^೪$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, $ಅ^೩+ಕ^೩ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ^೨-ಅಕ+ಕ^೨)$ ಮತ್ತು $ಅ^೪+ಅ^೨ಕ^೨+ಕ^೪ \equiv$ $(ಅ^೨+ಅಕ+ಕ^೨)(ಅ^೨-ಅಕ+ಕ^೨)$ ಇದು ಗೊತ್ತಿದ್ದುದರಿಂದ $ಅ^೨-ಅಕ+ಕ^೨$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು $(ಅ^೩+ಕ^೩)(ಅ^೨+ಅಕ+ಕ^೨)$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಎಂದು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು ಇಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು.

ಉ ೧. $೬ಕ್ಷ^೩+೫೫ಕ್ಷ^೨+೧೫೭ಕ್ಷ+೭೦$ ಮತ್ತು $೩ಕ್ಷ^೩+೧೫ಕ್ಷ^೨+೧೮ಕ್ಷ-೩೯$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇಯದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು, ಏಕೆಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕ-

ಗಳ ಬೈಜಿಕ ಜೋಡಿಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಕ್ಷ−೧ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವಾ.

$$೨ಕ್ಷ^೩ + ೧೫ಕ್ಷ^೨ + ೧೮ಕ್ಷ − ೩೫$$
$$= ೨ಕ್ಷ^೩ − ೨ಕ್ಷ^೨ + ೧೭ಕ್ಷ^೨ − ೧೭ಕ್ಷ + ೩೫ಕ್ಷ − ೩೫$$
$$= ೨ಕ್ಷ^೨(ಕ್ಷ − ೧) + ೧೭ಕ್ಷ(ಕ್ಷ − ೧) + ೩೫(ಕ್ಷ − ೧)$$
$$= (ಕ್ಷ − ೧)(೨ಕ್ಷ^೨ + ೧೭ಕ್ಷ + ೩೫)$$
$$= (ಕ್ಷ − ೧)(ಕ್ಷ + ೫)(೨ಕ್ಷ + ೭)$$

ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ಷ−೧ ಈ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ಕ್ಷ+೫ ಮತ್ತು ೨ಕ್ಷ+೭ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಅಡ್ಡಿಯಿಲ್ಲ. ರಾಶಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಕ್ಷ+೫ ಈ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವಾ.

$$೬ಕ್ಷ^೩ + ೫೫ಕ್ಷ^೨ + ೧೩೯ಕ್ಷ + ೭೦$$
$$= ೬ಕ್ಷ^೩ + ೩೦ಕ್ಷ^೨ + ೨೫ಕ್ಷ^೨ + ೧೨೫ಕ್ಷ + ೧೪ಕ್ಷ + ೭೦$$
$$= ೬ಕ್ಷ^೨(ಕ್ಷ + ೫) + ೨೫ಕ್ಷ(ಕ್ಷ + ೫) + ೧೪(ಕ್ಷ + ೫)$$
$$= (ಕ್ಷ + ೫)(೬ಕ್ಷ^೨ + ೨೫ಕ್ಷ + ೧೪)$$
$$= (ಕ್ಷ + ೫)(೨ಕ್ಷ + ೭)(೩ಕ್ಷ + ೨)$$

$\therefore$ (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೭) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಮತ್ತು (ಕ್ಷ−೧)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೭)(೩ಕ್ಷ+೨) ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಯಾವಾಗಲೂ ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆಂದಲ್ಲ. ಅನೇಕ ಸಲ ಯಾವುದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ, ನಂತರ ಅದರ ಯಾವ ಅವಯವಗಳು ಇರುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಯತ್ನಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ರಾಶಿ ಇರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯಬೇಕು. ಅನಂತರ

ಕ್ರಮವಾಗಿ ಉಳಿದ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಸಮಾವೇಶವಾಗುವದಿಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವದ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವಿರುವದೋ ಅದನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉ. ೨. ೬ಅ^{೩}+೧೩ಅ^{೨}ಕ+೪೧ಅಕ^{೨}+೧೨ಕ^{೩}, ೨೦ಅ^{೩}—೩೨ಅ^{೨}ಕ—ಅಕ^{೨}+೬ಕ^{೩} ಮತ್ತು ೧೬ಅ^{೪}ಕ—೫೪ಅಕ^{೪} ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ವಿಶೇಷ ಸುಲಭವಿರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೧೬ಅ^{೪}ಕ—೫೪ಅಕ^{೪} = ೨ಅಕ(೮ಅ^{೩}—೨೭ಕ^{೩})

= ೨ಅಕ(೨ಅ—೩ಕ)(೪ಅ^{೨}+೬ಅಕ+೯ಕ^{೨})

ಈ ಗುಣಕಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ಅದು ೨ಅ—೩ಕ ಇದೇ ಇರಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೬ಅ^{೩}+೧೩ಅ^{೨}ಕ—೪೧ಅಕ^{೨}+೧೨ಕ^{೩}

= ೬ಅ^{೩}—೯ಅ^{೨}ಕ+೨೨ಅ^{೨}ಕ—೩೩ಅಕ^{೨}—೮ಅಕ^{೨}+೧೨ಕ^{೩}

= ೩ಅ^{೨}(೨ಅ—೩ಕ)+೧೧ಅಕ(೨ಅ—೩ಕ)—೪ಕ^{೨}(೨ಅ—೩ಕ)

= (೨ಅ—೩ಕ)(೩ಅ^{೨}+೧೧ಅಕ—೪ಕ^{೨})

= (೨ಅ—೩ಕ)(ಅ+೪ಕ)(೩ಅ—ಕ)

೨೦ಅ^{೩}—೩೨ಅ^{೨}ಕ—ಅಕ^{೨}+೬ಕ^{೩}

= ೨೦ಅ^{೩}—೩೦ಅ^{೨}ಕ—೨ಅ^{೨}ಕ+೩ಅಕ^{೨}—೪ಅಕ^{೨}+೬ಕ^{೩}

= ೧೦ಅ^{೨}(೨ಅ—೩ಕ)—ಅಕ(೨ಅ—೩ಕ)—೨ಕ^{೨}(೨ಅ—೩ಕ)

= (೨ಅ—೩ಕ)(೧೦ಅ^{೨}—ಅಕ—೨ಕ^{೨})

= (೨ಅ—೩ಕ)(೨ಅ—ಕ)(೫ಅ+೨ಕ)

೨ಅ—೩ಕ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು

೨ಅಕ(ಅ+೪ಕ)(೨ಅ—೩ಕ)(೨ಅ—ಕ)(೩ಅ—ಕ)(೫ಅ+೨ಕ)

(೪ಅ^{೨}+೬ಅಕ+೯ಕ^{೨}). ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಮ.ಸಾ.ಪ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಪ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.)

೧. $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ನ^{೨} + ನ^{೪}$; $ಪ^{೩} + ನ^{೩}$.

೨. $ಯ^{೨} + ೮ಯ + ೧೬$; $ಯ^{೨} + ೫ಯ + ೪$.

೩. $ರ^{೨} - ೬ರ + ೯$; $ರ^{೨} - ೪ರ + ೩$.

೪. $ನ^{೩} - ೬೪$; $ನ^{೪} - ೧೬ನ^{೨} + ೨೫೬$.

೫. $೩ಮ^{೨} - ೨೭$; $೩ಮ^{೩} - ೮೧$.

೬. $ಪ^{೪} - ನ^{೪}$; $ಪ^{೬} - ೨ಪ^{೩}ನ^{೩} + ನ^{೬}$.

೭. $ನ^{೪} - ೬೨೫$; $ನ^{೩} - ೫ನ^{೨} + ೨ನ - ೧೦$.

೮. $ಕ್ಷ^{೩} + ೬ಕ್ಷ^{೨} + ೧೧ಕ್ಷ + ೬$; $ಕ್ಷ^{೩} + ೯ಕ್ಷ^{೨} + ೨೬ಕ್ಷ + ೨೪$.

೯. $೪ಕ್ಷ^{೩} - ೨೦ಕ್ಷ^{೨} - ೯ಕ್ಷ + ೪೫$; $೨ಕ್ಷ^{೩} - ೧೨ಕ್ಷ^{೨} + ೧೦ಕ್ಷ$.

೧೦. $೮ಯ^{೩} + ೨೪ಯ^{೨}ಕ್ಷ + ೨೪ಯಕ್ಷ^{೨} + ೮ಕ್ಷ^{೩}$;
$೪ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨}ಕ್ಷ + ೪ಯಕ್ಷ^{೨}$.

೧೧. $೨೫ಯ^{೨} + ೪೦ಯ + ೧೨ + ೧೨ಕ್ಷ - ೯ಕ್ಷ^{೨}$;
$೨೫ಯ^{೨} + ೩೦ಯಕ್ಷ + ೯ಕ್ಷ^{೨} + ೧೫ಯ + ೯ಕ್ಷ + ೨$

೧೨. $ಅ^{೩} + ೮ಕ^{೩} + ೧೨೫ಗ^{೩} - ೩೦ಅಕಗ$;
$೨ಅ^{೨} + ೨೦ಅಗ + ೫೦ಗ^{೨} - ೮ಕ^{೨}$.

೧೩. $ಅ^{೩}ಪ^{೩} - ೩೪೩ಅ^{೬}$; $ಪ^{೩} - ೩೭ಪ - ೮೪$.

೧೪. $೪ಕ್ಷ^{೩} + ೬೫ಕ್ಷ^{೨} + ೨೧೩ಕ್ಷ - ೧೯೦$;
$ಕ್ಷ^{೩} + ೧೯ಕ್ಷ^{೨} + ೮೩ಕ್ಷ + ೬೬$.

೧೫. $ಪ^{೪} + ೯ಪ^{೨} + ೮೧$; $ಪ^{೨} + ೧೨ಪ + ೨೭$; $ಪ^{೩} + ೨೭$.

೧೬. $೨ಕ್ಷ^{೨} - ೨೦ಕ್ಷ + ೪೨$; $೩ಕ್ಷ^{೨} + ೬ಕ್ಷ - ೪೫$; $೪ಕ್ಷ^{೨} - ೮ಕ್ಷ - ೧೪೦$.

೧೭. $ಯ^{೪} - ೧೧೨ಯ + ೩೮೪$; $೬ಯ^{೪} - ೩೮೪$; $೬ಯ^{೨} - ೩೮೪$.

ಲ. ಸಾ. ಪ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೮. $೨ಕ್ಷ^{೨} - ೨೪ಕ್ಷ + ೭೦$; $೩ಕ್ಷ^{೨} - ೯ಕ್ಷ - ೩೦$;
$ಕ್ಷ^{೨} - ೫ಕ್ಷ - ೧೪$.

೧೯. $೬ಯ^{೨} - ೧೧ಯಕ್ಷ - ೧೦ಕ್ಷ^{೨}$; $೧೨ಯ^{೨} - ೧೩ಯಕ್ಷ - ೧೪ಕ್ಷ^{೨}$;
$೮ಯ^{೨} - ೩೪ಯಕ್ಷ + ೩೫ಕ್ಷ^{೨}$.

೨೦. $ಅ^{೩} - ೧೧ಅ^{೨} + ೩೯ಅ - ೪೫$; $ಅ^{೩} - ೭ಅ + ೬$; $ಅ^{೩} - ೬ಅ^{೨} - ೭ಅ + ೬೦$.

೨೧. $೨೪ಪ^{೩} + ೩೪ಪ^{೨} - ೧೯ಪ - ೧೫$; $೬ಪ^{೩} + ಪ^{೨} - ೧೨ಪ + ೫$;
$೨ಪ^{೩} - ಪ^{೨} - ೨ಪ + ೧$; $೬ಪ^{೩} + ೧೩ಪ^{೨} + ೨ಪ - ೫$.

೩.

೪·೮. ಹಿಂದಿನ ಸಂಗ್ರಹಗಳೊಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸಾಧಾರಣತಃ ಸುಲಭವಿದೆ. ಆದರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬಾರದ ರಾಶಿಗಳು ಹಲವು ಸಾರೆ ನಮ್ಮೆದುರು ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿವೇಚಿಸಿದ ಗುಣಕ-ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬಹಳವಾಗುವದು.

ಉ. **೧.** $೧೨ಯ^{೩} + ೪೦ಯ^{೨} + ೧೩ಯ - ೩೦$ ಮತ್ತು $೬ಯ^{೩} - ೫ಯ^{೨} - ೨೧ಯ + ೧೦$ ಇವುಗಳ **ಮ.ಸಾ.ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ.ಸಾ.ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದ ನಂತರ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ-ಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಶೂನ್ಯವಿರುವದರಿಂದ $ಯ - ೧$ ಇದೊಂದು ಅದರ ಅವಯವವಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ,

$$೬ಯ^{೩} + ೫ಯ^{೨} - ೨೧ಯ + ೧೦$$
$$= ೬ಯ^{೩} - ೬ಯ^{೨} + ೧೧ಯ^{೨} - ೧೧ಯ - ೧೦ಯ + ೧೦$$
$$= ೬ಯ^{೨}(ಯ - ೧) + ೧೧ಯ(ಯ - ೧) - ೧೦(ಯ - ೧)$$
$$= (ಯ - ೧)(೬ಯ^{೨} + ೧೧ಯ - ೧೦)$$
$$= (ಯ - ೧)(೨ಯ + ೫)(೩ಯ - ೨)$$

ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದನಂತರ ಉಳಿದ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಈಗ ಸುಲಭವಿರುವದು. ಏಕಂದರೆ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ $೨ಯ + ೫$ ಮತ್ತು $೩ಯ - ೨$ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅವಯವವು ಅದರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ಎಂದು ಅನುಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕ-ಗಳ ಬೇರೀಜು ೩೫ ಇರುವದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ $೨ಯ + ೫$ ಮತ್ತು $೩ಯ - ೨$ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜನಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

$$೧೨ಯ^{೩} + ೪೦ಯ^{೨} + ೧೩ಯ - ೩೦$$
$$= ೧೨ಯ^{೩} + ೩೦ಯ^{೨} + ೧೦ಯ^{೨} + ೨೫ಯ - ೧೨ಯ - ೩೦$$
$$= ೬ಯ^{೨}(೨ಯ + ೫) + ೫ಯ(೨ಯ + ೫) - ೬(೨ಯ + ೫)$$
$$= (೨ಯ + ೫)(೬ಯ^{೨} + ೫ಯ - ೬)$$
$$= (೨ಯ + ೫)(೩ಯ - ೨)(೨ಯ + ೩)$$

∴ $(೨ಯ+೫)(೩ಯ-೨)$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು

$(ಯ-೧)(೨ಯ+೫)(೩ಯ-೨)(೨ಯ+೩)$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೨. $ಯ^{೪} - ೩ಯ^{೩} - ೩೬ಯ^{೨} + ೬೮ಯ + ೨೪೦$ ಮತ್ತು $ಯ^{೪} + ೯ಯ^{೩} - ೫ಯ^{೨} - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦$ ಇವುಗಳ **ಲ.ಸಾ.ವಿ.** ಮತ್ತು **ಮ.ಸಾ.ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ವಿಷಮ ಘಾತ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಯು ಒಂದೇ (-೧೪೪) ಇದ್ದುದರಿಂದ $ಯ+೧$ ಇದೊಂದು ಅವಯವವಿರುವದು. ಅದರಂತೆ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$ಯ^{೪} + ೯ಯ^{೩} - ೫ಯ^{೨} - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦$$
$$= ಯ^{೪} + ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} - ೧೩ಯ^{೨} - ೧೩ಯ - ೧೪೦ಯ - ೧೪೦$$
$$= ಯ^{೩}(ಯ + ೧) + ೮ಯ^{೨}(ಯ + ೧) - ೧೩ಯ(ಯ + ೧) - ೧೪೦(ಯ + ೧)$$
$$= (ಯ + ೧)(ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} - ೧೩ಯ - ೧೪೦).$$

ಈಗ $ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} - ೧೩ಯ - ೧೪೦$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಜೋಡಿಯು -೧೪೪. ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳು $ಯ-೨, ಯ+೨, ಯ-೪, ಯ-೫, ಯ+೫$.... ಇ. ಈಗ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

($ಯ+೪$) ಈ ಗುಣಕವು ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ. (ಏಕೆಂದರೆ ಅದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಯು ೫ ರಿಂದ -೧೪೪ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ.)

$ಯ=೨$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು -೧೨೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $ಯ=-೨$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ -೯೦ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ

ಯ—೨ ಮತ್ತು ಯ+೨ ಇವು ಅವಯವಗಳಲ್ಲ. ಯ=೪ ಎಂದು ತೆಗೆದು-ಕೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಯ—೪ ಇದೊಂದು ಅವಯವವಿರುವದು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} - ೧೩ಯ - ೧೪೦$$
$$= ಯ^{೩} - ೪ಯ^{೨} + ೧೨ಯ^{೨} - ೪೮ಯ + ೩೫ಯ - ೧೪೦$$
$$= ಯ^{೨}(ಯ - ೪) + ೧೨ಯ(ಯ - ೪) + ೩೫(ಯ - ೪)$$
$$= (ಯ - ೪)(ಯ^{೨} + ೧೨ಯ + ೩೫)$$
$$= (ಯ - ೪)(ಯ + ೫)ಯ + ೭)$$

∴ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು $= (ಯ + ೧)(ಯ - ೪)(ಯ + ೫)(ಯ - ೭)$

ಈಗ ಮ. ಸಾ. ಪ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಈ ಅವಯವ-ಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುತರ-ವಾಗಿ ಇರುವವು. ಯ+೧ ಇದು ಇಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದ ೨೪೦ ಇದಕ್ಕೆ ೭ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೭ ಇದಾದರೂ ಇರಲಾರದು. ಯ—೪ ಮತ್ತು ಯ+೫ ಇವು ಉಳಿದವು.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ೨೭೦ ಇರುವದು. ಅಂದ ಮೇಲೆ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಯ=೪ ಹಿಡಿದರೆ, ರಾಶಿಯು $= ೨೫೬ - ೧೯೨ - ೫೭೬ + ೨೭೨ + ೨೪೦ = ೦$

∴ ಯ—೪ ಇದು ಅವಯವವಿದೆ. ಯ=—೫ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ರಾಶಿಯು $= ೬೨೫ + ೩೭೫ - ೯೦೦ - ೩೪೦ + ೨೪೦ = ೦$

∴ ಯ+೫ ಇದಾದರೂ ಅವಯವವಿದೆ.

$$ಯ^{೪} - ೩ಯ^{೩} - ೩೬ಯ^{೨} + ೬೮ಯ + ೨೪೦$$
$$= ಯ^{೪} - ೪ಯ^{೩} + ಯ^{೩} - ೪ಯ^{೨} - ೩೨ಯ^{೨} + ೧೨೮ಯ$$
$$- ೬೦ಯ + ೨೪೦$$
$$= ಯ^{೩}(ಯ - ೪) + ಯ^{೨}(ಯ - ೪) - ೩೨ಯ(ಯ - ೪)$$
$$- ೬೦(ಯ - ೪)$$
$$= (ಯ - ೪)(ಯ^{೩} + ಯ^{೨} - ೩೨ಯ - ೬೦)$$

= (ಯ−೪)(ಯ^೩+೫ಯ^೨−೪ಯ^೨−೨೦ಯ−೧೨ಯ−೬೦)

= (ಯ−೪){ಯ^೨(ಯ+೫)−೪ಯ(ಯ+೫)−೧೨(ಯ+೫)}

= (ಯ−೪)(ಯ+೫)(ಯ^೨−೪ಯ−೧೨)

= (ಯ−೪)(ಯ+೫)(ಯ+೨)(ಯ−೬)

∴ (ಯ−೪)(ಯ+೫) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (ಯ+೧)
(ಯ−೪)(ಯ+೫)(ಯ+೭)(ಯ+೨)(ಯ−೬) ಇದು ಲ.ಸಾ.ವಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೯.

ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ—

೧. ಪ^೩+೧೬ಪ^೨+೬೫ಪ+೫೦ ; ಪ^೩+೧೩ಪ^೨+೫ಪ−೧೫೦.

೨. ಮ^೩−೫ಮ^೨−೨೨ಮ+೫೬; ಮ^೩−೧೯ಮ+೩೦.

೩. ಸ^೩+೧೩ಸ^೨+೫೦ಸ+೫೬: ಸ^೩+೧೦ಸ^೨+೧೭ಸ−೨೮.

೪. ೨ಯ^೩−೨೩ಯ^೨+೧೮ಯ+೩೫: ೩ಯ^೩−೩೭ಯ^೨+
೧೦೭ಯ−೩೫.

೫. ಕ್ಷ^೩−೩ಕ್ಷ^೨−೧೦ಕ್ಷ+೨೪: ಕ್ಷ^೩−ಕ್ಷ^೨−೧೪ಕ್ಷ+೨೪.

೬. ೬ಪ^೩+೭ಪ^೨−೯ಪ+೨: ೮ಪ^೩−೧೮ಪ^೨+೩ಪ+೨.

೭. ೩ರ^೩−ರ^೨−೨೦ರ+೧೪: ೭ರ^೩+೧೦ರ^೨−೨೭ರ+೮.

೮. ೨ಯ^೩+೫ಯ^೨+ಯ−೩; ೮ಯ^೩+೬ಯ^೨−ಯ+೧೨.

೯. ೮ಮ^೩−೪ಮ^೨−೩೪ಮ+೧೫: ೨ಮ^೩+೫ಮ^೨+೫ಮ+೩.

೧೦. ೩ಸ^೩+೪ಸ^೨−೧೧ಸ−೪: ೬ಸ^೩−ಸ^೨+೮ಸ+೩.

೧೧. ೬ಕ್ಷ^೩+೨೫ಕ್ಷ^೨−೧೭ಕ್ಷ+೪೦: ೩ಕ್ಷ^೩+೧೭ಕ್ಷ^೨−೬೬ಕ್ಷ−೪೦.

೧೨. ೧೫ಯ^೩−೬೭ಯ^೨−೧೧ಯ+೧೨;
೨ಯ^೩−೧೧ಯ^೨+೪ಯ+೫.

೪.

ಮ.ಸಾ.ವಿ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ.ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು.

೪-೯. ೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅಪವರ್ತನ ೩. ೧೫ ರಲ್ಲಿ ೯ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ೯ [illegible] ಮತ್ತು ೬. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ೩ ಇದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದು ಕಾಣುತ್ತದೆ

ನಾವು ಬೇರೊಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೩೨ ಮತ್ತು ೫೬ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೩೨ ಮತ್ತು ೫೬ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೮೮, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೨೪. ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅಂತರದ ಒಂದು ಗುಣಕ ವಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಪ್ರಸ್ಥಾಪಿಸಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. **ತ** ಮತ್ತು **ದ** ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು **ಮ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, **ತ=ಮಕ** ಮತ್ತು **ದ=ಮಗ** (ಇಲ್ಲಿ **ಕ** ಮತ್ತು **ಗ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತ ಮತ್ತು **ದ** ಗಳಿಗೆ **ಮ** ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗ ಲಬ್ಧಗಳಿವೆ)

$$\therefore ತ + ದ = ಮಕ + ಮಗ = ಮ(ಕ + ಗ), \text{ ಮತ್ತು}$$

$$ತ - ದ = ಮಕ - ಮಗ = ಮ(ಕ - ಗ).$$

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೧. ∴ **ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ** ಮತ್ತು **ಅದರಂತಯೇ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.**

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವು ಹಲವು ಸಾರೆ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧. $೩ಯ^{3} - ೩೭ಯ^{2} + ೯೪ಯ + ೮೦$ ಮತ್ತು $೩ಯ^{3} - ೩೧ಯ^{2} + ೫೦ಯ + ೪೮$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳ-
[illegible]

ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು $= ೬ಯ^{2} - ೪೪ಯ - ೩೨$

$$= ೨(೩ಯ^{2} - ೨೨ಯ - ೧೬)$$

$$= ೨(ಯ - ೮)(೩ಯ + ೨)$$

೨ ಇದು ಮೂರು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಯ—೮ ಆಗಬಹುದೆಂದು, ಇಲ್ಲವೆ ೩ಯ+೨ ಆಗಬಹುದು. ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡೂ ಆಗಬಹುದು. ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಮುಂಡಿಸಿ ನೋಡುವಾ.

೩ಯ³ − ೩೭ಯ² + ೯೪ಯ + ೮೦

= ೩ಯ³ − ೨೪ಯ² − ೧೩ಯ² + ೧೦೪ಯ − ೧೦ಯ + ೮೦

= ೩ಯ²(ಯ − ೮) − ೧೩ಯ(ಯ − ೮) − ೧೦(ಯ − ೮)

= (ಯ − ೮)(೩ಯ² − ೧೩ಯ − ೧೦)

= (ಯ − ೮)(ಯ − ೫)(೩ಯ + ೨)

೩ಯ³ − ೨೮ಯ² + ೨೮ಯ + ೩೨

= ೩ಯ³ − ೨೪ಯ² − ೪ಯ² + ೩೨ಯ − ೪ಯ + ೩೨

= ೩ಯ²(ಯ − ೮) − ೪ಯ(ಯ − ೮) − ೪(ಯ − ೮)

= (ಯ − ೮)(೩ಯ² − ೪ಯ − ೪)

= (ಯ − ೮)(ಯ − ೨)(೩ಯ + ೨)

∴ (ಯ − ೮)(೩ಯ + ೨) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು

(ಯ − ೮)(ಯ − ೫)(ಯ − ೨)(೩ಯ + ೨) ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೨. ೨೪ಕ್ಷ³ + ೯೪ಕ್ಷ² + ೭೧ಕ್ಷ − ೩೫ ಮತ್ತು ೮ಕ್ಷ³ − ೩೦ಕ್ಷ² − ೫೭ಕ್ಷ + ೩೫ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಕೊನೆಯ ಪದವು ಹೋಗುವ ಅನುಕೂಲವು ಕಂಡುಬರುವದು.

ರಾಶಿಗಳ ಜೋಡಿಯು = ೩೨ಕ್ಷ³ + ೬೪ಕ್ಷ² + ೧೪ಕ್ಷ

= ೨ಕ್ಷ(೧೬ಕ್ಷ² + ೩೨ಕ್ಷ + ೭)

= ೨ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ + ೧)(೪ಕ್ಷ + ೭)

೨ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂಲರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ೪ಕ್ಷ+೧ ಇದು ಆಗಬಹುದೇ? ಮೊದಲನೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಪೈಕಿ ಜೋಡಿಯು ೧೫೪ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ −೪೪ ಇದೆ. ೪ಕ್ಷ+೧ ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಸಿದ (೫ ರಿಂದ) ಅದಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕ

ವಿರಲಾರದು. ೪ಕ್ಷ + ೭ ಇದು ಉಳಿಯಿತು. ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ (೧೧ರಿಂದ) ೧೫೪ ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು −೪೪ ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದೇ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

೨೪ಕ್ಷ^{೩} + ೯೪ಕ್ಷ^{೨} + ೭೧ಕ್ಷ — ೩೫

= ೨೪ಕ್ಷ^{೩} + ೪೨ಕ್ಷ^{೨} + ೫೨ಕ್ಷ^{೨} + ೯೧ಕ್ಷ — ೨೦ಕ್ಷ — ೩೫

= ೬ಕ್ಷ^{೨}(೪ಕ್ಷ + ೭) + ೧೩ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ + ೭) + ೫(೪ಕ್ಷ + ೭)

= (೪ಕ್ಷ + ೭)(೬ಕ್ಷ^{೨} + ೧೩ಕ್ಷ — ೫)

= (೪ಕ್ಷ + ೭)(೩ಕ್ಷ — ೧)(೨ಕ್ಷ + ೫).

೮ಕ್ಷ^{೩} — ೩೦ಕ್ಷ^{೨} — ೫೭ಕ್ಷ + ೩೫

= ೮ಕ್ಷ^{೩} + ೧೪ಕ್ಷ^{೨} — ೪೪ಕ್ಷ^{೨} — ೭೭ಕ್ಷ + ೨೦ಕ್ಷ + ೩೫

= ೨ಕ್ಷ^{೨}(೪ಕ್ಷ + ೭) — ೧೧ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ + ೭) + ೫(೪ಕ್ಷ + ೭)

= (೪ಕ್ಷ + ೭)(೨ಕ್ಷ^{೨} — ೧೧ಕ್ಷ + ೫)

= (೪ಕ್ಷ + ೭)(೨ಕ್ಷ — ೧)(ಕ್ಷ — ೫)

∴ ೪ಕ್ಷ + ೭ ಇದು **ಮ. ಸಾ ವಿ.** ಮತ್ತು (೪ಕ್ಷ + ೭)(೪ಕ್ಷ — ೧)

(೨ಕ್ಷ + ೫)(೨ಕ್ಷ — ೧)(ಕ್ಷ — ೫) ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

೪·೧೦. ಮೇಲಿನ ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ ಒಂದೇ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಅದು ಬೋಧವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿಯು ಮತ್ತು ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ೧೨ಅ^{೩} — ೪೪ಅ^{೨} + ೪೭ಅ — ೧೫ ಮತ್ತು ೪ಅ^{೩} — ೮ಅ^{೨} — ೧೭ಅ + ೩೦ ಇಂಥ ಜೋಡಿ ಇದ್ದರೆ ಏನು ಮಾಡುವದು? ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಯಾವುದೇ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದಿಲ್ಲ.

೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೩ ಇರುವದು. ೧೫ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ೯ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಕಂಡು ಬರುವದು? ೧೫ ರ ಮುಮ್ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ೯ ರ ನಾಲ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೮೧ ಆಗುವದು.

೩ ಇದು ೮೧ ರ ಗುಣಕವಿದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೯. ೩ ಇದು ೯ ರ ದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು.

೬೪ ಮತ್ತು ೫೬ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೫೬ ರ ಇಮ್ಮಡಿ ಮತ್ತು ೬೪ ರ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ೩೦೪ ಆಗುವದು. ೮ ಇದು ಅದರಲ್ಲಿ ಗುಣಕ ವಿದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೮೦. ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಇದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಮೊದಲನೆಯದರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಇರುವದು.

ತ ಮತ್ತು **ದ** ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ **ಮ** ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ **ತ=ಮಕ** ಮತ್ತು **ದ=ಮಗ** (**ಕ** ಮತ್ತು **ಗ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ತ** ಮತ್ತು **ದ** ಗಳನ್ನು **ಮ** ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು).

∴ **ಚತ = ಚಮಕ** ಮತ್ತು **ಜದ = ಜಮಗ** (**ಚ** ಮತ್ತು **ಜ** ಇವು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದು).

∴ **ಚತ + ಜದ = ಚಮಕ + ಜಮಗ = ಮ(ಚಕ + ಜಗ)** ಮತ್ತು **ಚತ − ಜದ = ಚಮಕ − ಜಮಗ = ಮ(ಚಕ − ಜಗ)**. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೨.

ಅದು ಒಂದನೇ ರಾಶಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಎರಡನೇದರ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ತಿಳಿಯುವದು. **ಚ = ಜ = ೧** ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ಎರಡನೇ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಜೋಡಿಯ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದರಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

ಉ. ೩. ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ೩ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಆ ಗುಣಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಕ್ಷ^{3} ಪದವು ಲೋಪವಾಗುತ್ತದೆ.

೩ × ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು—ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ = ೧೨ಕ್ಷ^{3} — ೨೪ಕ್ಷ^{2} - ೫೧ಕ್ಷ + ೯೦

— (೧೨ಕ್ಷ^{3} — ೪೪ಕ್ಷ^{2} + ೪೯ಕ್ಷ — ೧೫)

= ೨೦ಕ್ಷ^{2} — ೧೦೦ಕ್ಷ + ೧೦೫

= ೫(೪ಕ್ಷ^{2} — ೨೦ಕ್ಷ + ೨೧)

= ೫(೨ಕ್ಷ — ೩)(೨ಕ್ಷ — ೭)

೫ ಇದು ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ೧೫ ಮತ್ತು ೩೦ ಇರುವದರಿಂದ ೨ಕ್ಷ — ೭ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ೨ಕ್ಷ + ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರಬಹುದು. ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುರಿಸಿ ನೋಡುವಾ.

೧೨ಕ್ಷ^{3} — ೪೪ಕ್ಷ^{2} + ೪೯ಕ್ಷ — ೧೫

= ೧೨ಕ್ಷ^{3} — ೧೮ಕ್ಷ^{2} — ೨೬ಕ್ಷ^{2} + ೩೯ಕ್ಷ + ೧೦ಕ್ಷ — ೧೫

= ೬ಕ್ಷ^{2}(೨ಕ್ಷ — ೩) — ೧೩ಕ್ಷ(೨ಕ್ಷ — ೩) + ೫(೨ಕ್ಷ — ೩)

= (೨ಕ್ಷ — ೩) (೬ಕ್ಷ^{2} — ೧೩ಕ್ಷ + ೫)

= (೨ಕ್ಷ — ೩)(೨ಕ್ಷ — ೧)(೩ಕ್ಷ — ೫)

೪ಕ್ಷ^{3} — ೮ಕ್ಷ^{2} — ೧೭ಕ್ಷ + ೩೦ = ೪ಕ್ಷ^{3} — ೬ಕ್ಷ^{2} — ೨ಕ್ಷ^{2} + ೩ಕ್ಷ — ೨೦ಕ್ಷ + ೩೦

= ೨ಕ್ಷ^{2}(೨ಕ್ಷ — ೩) — ಕ್ಷ(೨ಕ್ಷ — ೩) — ೧೦(೨ಕ್ಷ — ೩)

= (೨ಕ್ಷ — ೩)(೨ಕ್ಷ^{2} — ಕ್ಷ — ೧೦)

= (೨ಕ್ಷ — ೩)(೨ಕ್ಷ — ೫)(ಕ್ಷ + ೨)

∴ ೨ಕ್ಷ — ೩ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು (ಕ್ಷ + ೨)(೨ಕ್ಷ — ೫)

(೨ಕ್ಷ — ೩)(೨ಕ್ಷ — ೧)(೩ಕ್ಷ — ೫) ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೂ ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸ್ಥಿರಪದವು ಲೋಪವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$೨ \times \text{ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ} + \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿ}$$
$$= ೨೪ಅ^{೩} - ೮೪ಅ^{೨} + ೯೦ಅ - ೩೦ + ೪ಅ^{೩} - ೧೨ಅ^{೨} - ೯ಅ + ೩೦$$
$$= ೨೮ಅ^{೩} - ೯೬ಅ^{೨} + ೮೧ಅ$$
$$= ಅ(೨ಅ - ೩)(೧೪ಅ - ೨೭)$$
$$= ಅ(೨ಅ - ೩)(೧೪ಅ - ೨೭)$$

ಅ ಇದು ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ ಮತ್ತು ೧೫ ಮತ್ತು ೩೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ೨೭ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ೨ಅ − ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರಬಹುದೆಂದು ಅನುಮಾನ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

೪·೧೧. **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಎಲ್ಲ ಗುಣಕಗಳು ಸಮಾವೇಶವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಬಹುದು.

ತ ಮತ್ತು **ದ** ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ **ಮ** ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ** ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದ್ದರೆ **ತ** ≡ **ಮಕ** ಮತ್ತು **ದ** ≡ **ಮಗ** (**ಕ** ಮತ್ತು **ಗ** ಇವು **ತ** ಮತ್ತು **ದ** ಗಳಿಗೆ **ಮ** ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಿ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು).

ಈಗ **ಮ** ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದ್ದುದರಿಂದ **ಕ** ಮತ್ತು **ಗ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಗುಣಕಗಳಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ **ತ** ಮತ್ತು **ದ** ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಮಕಗ. ಲ = ಮಕಗ**, ಆದುದರಿಂದ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೪೫, ೩ ಇದು ೪೫ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ೬ಅ ಮತ್ತು ೯ಅ² ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩ಅ, ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೮ಅ², ೩ಅ ಇದು ೧೮ಅ² ದ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. **ಆಯ** ಮತ್ತು **ಕಯ** ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಆಕಯ. ಯ ಇದು **ಆಕಯ** ದ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೩. ಯಾವದೇ ರಾಶಿಗಳ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

೩೧೨. ∵ ತ ≡ ಮಕ, ದ ≡ ಮಗ, ಮತ್ತು ಲ ≡ ಮಕಗ,

∴ ತ × ದ ≡ ಮಕ × ಮಗ

≡ ಮಕಗ × ಮ

≡ ಲ × ಮ | ∴ ತದ = ಲಮ

ಅಂದರೆ ಯಾವದೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ × ಎರಡನೇ ರಾಶಿ ≡ ಲ.ಸಾ.ವಿ. × ಮ.ಸಾ.ವಿ.

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೪. ೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ೩ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ೪೫. ೧೫ × ೯ = ೧೩೫; ೩ × ೪೫ = ೧೩೫; ೩೨ ಮತ್ತು ೫೬ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ೮ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ೨೨೪. ೩೨ × ೫೬ = ೧೭೯೨; ೮ × ೨೨೪ = ೧೭೯೨. ಅಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಅಕಯ ಅಯ × ಕಯ = ಅಕಯ^2; ಯ × ಅಕಯ = ಅಕಯ^2

ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. (ಇಲ್ಲವೇ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ). ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೂ ಮೂರು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕನೆಯದನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವವು.

$$\text{ಇಷ್ಟರಾಶಿಯು} = \frac{\text{ಲ.ಸಾ.ವಿ.} \times \text{ಮ.ಸಾ.ವಿ.}}{\text{ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ}}$$

$$\text{ಲ.ಸಾ.ವಿ.} = \frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಮ.ಸಾ.ವಿ.}}$$

$$\text{ಮ.ಸಾ.ವಿ.} = \frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಲ.ಸಾ.ವಿ.}}$$

ತದ=ಲಮ ∴ ಲ= $\frac{\text{ತದ}}{\text{ಮ}}$ ಮತ್ತು ಮ= $\frac{\text{ತದ}}{\text{ಲ}}$.

ಉ.೫. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪ಯ+೫ ಮತ್ತು ೮ಯ^{೩}−೧೮ಯ^{೨}−೨೩ಯ+೧೫ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು ೮ಯ^{೨}+೬ಯ−೫ ಇದ್ದರೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಯು ಯಾವುದು ?

ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಬರುವ ಸಂಭವ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರಯಾಸ ಅಷ್ಟು ಬಹಳ ಸಂಭವವಿಲ್ಲ. ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕ್ಯ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯು = ೮ಯ^{೨}+೬ಯ−೫

= (೪ಯ+೫)(೨ಯ−೧)

ಲ.ಸಾ.ವಿ. = ೮ಯ^{೩}−೧೮ಯ^{೨}−೨೩ಯ+೧೫

= ೮ಯ^{೩}+೧೦ಯ^{೨}−೨೮ಯ^{೨}−೩೫ಯ+೧೨ಯ+೧೫

= ೨ಯ^{೨}(೪ಯ+೫)−೭ಯ(೪ಯ+೫)+೩(೪ಯ+೫)

= (೪ಯ+೫)(೨ಯ^{೨}−೭ಯ+೩)

= (೪ಯ+೫)(೨ಯ−೧)(ಯ−೩)

∴ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು = $\frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}}$

= $\frac{(\text{೪ಯ}+\text{೫}) \times (\text{೪ಯ}+\text{೫})(\text{೨ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}-\text{೩})}{(\text{೪ಯ}+\text{೫})(\text{೨ಯ}-\text{೧})}$

= (೪ಯ+೫)(ಯ−೩)

= ೪ಯ^{೨}−೭ಯ−೧೫ *

[* ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಂತೆ ರೂಪವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ವಿಸ್ತಾರದಿಂದ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಡಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ]

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬೇಗನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯು ಗುಣಕರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು. ಆದರ ಮೇಲಿಂದ

$$೬ಯ^3 - ೧೨ಯ^2 - ೨೩ಯ + ೧೫$$
$$= (ಯ - ೩)(೬ಯ^2 + ೬ಯ - ೫)$$

[$೬ಯ^2$ ಕ್ಕೆ ಯ ದಿಂದ ಮತ್ತು -೫ ಕ್ಕೆ -೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ $೬ಯ^3$ ಮತ್ತು ೧೫ ಬರುವವು. ೬ಯ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $-೧೨ಯ^2$ ಮತ್ತು $-೨೩ಯ$ ಈ ಪದಗಳು ಸಹ ಬರುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬೇಕು].

$$\therefore ಇಷ್ಟ\ ರಾಶಿಯು = \frac{ಮ.\ ಸಾ.\ ವಿ. \times ಲ.\ ಸಾ.\ ವಿ.}{ಗೊತ್ತಿದ್ದ\ ರಾಶಿ}$$
$$= \frac{(೪ಯ + ೫) \times (ಯ - ೫)(೬ಯ + ೬ಯ - ೫)}{೬ಯ^2 + ೬ಯ - ೫}$$
$$= (೪ + ೫)(ಯ - ೩)$$

ಉ. ೬. ಎರಡು **ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ.** $೨ಕ್ಷ^2 - ೧೧ಕ್ಷ + ೧೫$ ಇದ್ದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** $೨೪ಕ್ಷ^4 - ೧೫೪ಕ್ಷ^3 + ೨೯೧ಕ್ಷ^2 - ೧೧೦ಕ್ಷ - ೭೫$ ಇರುವದು, ಆದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳಾವವು ?

ಮ. ಸಾ. ವಿ. $= ೨ಕ್ಷ^2 - ೧೧ + ೧೫$
$$= (ಕ್ಷ^2ಕ್ಷ - ೩)(೨ಕ್ಷ - ೫)$$

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಗುಣಕವಿರುವದರಿಂದ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಿರುವದು.

$$೨ಕ್ಷ^4 - ೧೫೪ಕ್ಷ^3 + ೨೯೧ಕ್ಷ^2 - ೧೧೦ಕ್ಷ - ೭೫$$
$$= ೨೪ಕ್ಷ^4 - ೭೨ಕ್ಷ^3 - ೮೨ಕ್ಷ^3 + ೨೪೬ಕ್ಷ^2 + ೪೫ಕ್ಷ^2 +$$
$$೧೩೫ಕ್ಷ + ೨೫ಕ್ಷ - ೭೫$$
$$= ೨೪ಕ್ಷ^3(ಕ್ಷ - ೩) - ೮೨ಕ್ಷ^2(ಕ್ಷ - ೩) + ೪೫ಕ್ಷ\ (ಕ್ಷ - ೩) + ೨೫(ಕ್ಷ - ೩)$$
$$= (ಕ್ಷ - ೩)(೨೪ಕ್ಷ^3 - ೮೨ಕ್ಷ^2 ೪೫ಕ್ಷ + ೨೫)$$

= (ಕ್ಷ − ೩)(೨೪ಕ್ಷ^{3} − ೬೦ಕ್ಷ^{2} − ೨೨ಕ್ಷ^{2} + ೫೫ಕ್ಷ − ೧೦ಕ್ಷ + ೨೫)
= (ಕ್ಷ − ೩){೧೨ಕ್ಷ^{2}(೨ಕ್ಷ − ೫) − ೧೧ಕ್ಷ(೨ಕ್ಷ − ೫) − ೫(೨ಕ್ಷ − ೫)}
= (ಕ್ಷ − ೩)(೨ಕ್ಷ − ೫)(೧೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ − ೫)
= (ಕ್ಷ − ೩)(೨ಕ್ಷ − ೫)(೩ಕ್ಷ + ೧)(೪ಕ್ಷ − ೫)

ಈಗ (ಕ್ಷ − ೩)(೨ಕ್ಷ − ೫) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು. ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಲ್ಲಿ ೩ಕ್ಷ + ೧ ಮತ್ತು ೪ಕ್ಷ − ೫ ಇವೆರಡು ಅವಯವಗಳು ಉಳಿಯುವವು. ರಾಶಿಗಳು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ೩ಕ್ಷ − ೧ ಈ ಅವಯವವು ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ೪ಕ್ಷ + ೫ ಇದು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಗಳು (ಕ್ಷ − ೩)(೨ಕ್ಷ − ೫)(೩ಕ್ಷ + ೧) ಮತ್ತು (ಕ್ಷ − ೩)(೨ಕ್ಷ − ೫)(೪ಕ್ಷ − ೫).

ತೀವ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೀತಿ: **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಅವಯವವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ೨ಕ್ಷ^{2} ಕ್ಕೆ ೧೨ಕ್ಷ^{2} ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ೨೪ಕ್ಷ^{4}, ಮತ್ತು ೧೫ ಕ್ಕೆ − ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ − ೭೫ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು − ೧೧ಕ್ಷ ಮತ್ತು ೧೨ಕ್ಷ^{2} ಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು − ೧೩೨ಕ್ಷ^{3}. ಇದನ್ನು − ೧೫೪ಕ್ಷ^{3} ದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ − ೨೨ಕ್ಷ^{3}, ಇದಕ್ಕೆ ೨ಕ್ಷ^{2} ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ − ೧೧ಕ್ಷ ಬರುವದು, ಆದುದರಿಂದ

೨೪ಕ್ಷ^{4} − ೧೫೪ಕ್ಷ^{3} + ೨೯೧ಕ್ಷ^{2} − ೧೧೦ಕ್ಷ − ೭೫
= (೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ + ೧೫)(೧೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ − ೫)
[ಬಾಯಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.]
= (೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ + ೧೫)(೩ಕ್ಷ + ೧)(೪ಕ್ಷ − ೫)
∴ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಗಳು (೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ + ೧೫)(೩ಕ್ಷ + ೧) ಮತ್ತು
(೨ಕ್ಷ^{2} − ೧೧ಕ್ಷ + ೧೫)(೪ಕ್ಷ − ೫).

ಉ. ೭. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಯ − ೫ ಮತ್ತು ೪೮ಯ^{5} − ೧೬ಯ^{4} − ೨೨೪ಯ^{3} − ೧೧೬ಯ^{2} + ೫೩ಯ + ೩೦ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು ೧೨ಯ^{3} - ೨೮ಯ^{2} − ೯ಯ + ೧೦ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವಾದುದು.

೧೨ಯ^{೩} − ೨೮ಯ^{೨} − ೯ಯ + ೧೦
= ೧೨ಯ^{೩} − ೩೦ಯ^{೨} + ೨ಯ^{೨} − ೫ಯ − ೪ಯ + ೧೦
= ೬ಯ^{೨}(೨ಯ − ೫) + ಯ(೨ಯ − ೫) − ೨(೨ಯ − ೫)
= (೨ಯ − ೫)(೬ಯ^{೨} + ಯ − ೨)
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧)(೩ಯ + ೨)

ಈ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳು ತಿಳಿದ ನಂತರ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವಿದೆ.

೪೮ಯ^{೫} − ೧೬ಯ^{೪} − ೨೨೪ಯ^{೩} − ೧೧೬ಯ^{೨} + ೫೩ಯ + ೩೦
= ೪೮ಯ^{೫} − ೧೨೦ಯ^{೪} + ೧೦೪ಯ^{೪} − ೨೬೦ಯ^{೩} + ೩೬ಯ^{೩} − ೯೦ಯ^{೨} − ೨೬ಯ^{೨} + ೬೫ಯ − ೧೨ಯ + ೩೦
= ೨೪ಯ^{೪}(೨ಯ − ೫) + ೫೨ಯ^{೩}(೨ಯ − ೫) + ೧೮ಯ^{೨}(೨ಯ − ೫) − ೧೩ಯ(೨ಯ − ೫) − ೬(೨ಯ − ೫)
= (೨ಯ − ೫)(೨೪ಯ^{೪} + ೫೨ಯ^{೩} + ೧೮ಯ^{೨} − ೧೩ಯ − ೬)
= (೨ಯ − ೫)
(೨೪ಯ^{೪} − ೧೨ಯ^{೩} + ೬೪ಯ^{೩} − ೩೨ಯ^{೨} + ೫೦ಯ^{೨} − ೨೫ಯ + ೧೨ಯ − ೬)
= (೨ಯ − ೫){೧೨ಯ^{೩}(೨ಯ − ೧) + ೩೨ಯ^{೨}(೨ಯ − ೧) + ೨೫ಯ(೨ಯ − ೧) + ೬(೨ಯ − ೧)}
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧)(೧೨ಯ^{೩} + ೩೨ಯ^{೨} + ೨೫ಯ + ೬)
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧)
(೧೨ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} + ೨೪ಯ^{೨} + ೧೬ಯ + ೯ಯ + ೬)
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧){೪ಯ^{೨}(೩ಯ + ೨) + ೮ಯ(೩ಯ + ೨) + ೩(೩ಯ + ೨)}
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧)(೩ಯ + ೨)(೪ಯ^{೨} + ೮ಯ + ೩)
= (೨ಯ − ೫)(೨ಯ − ೧)(೩ಯ + ೨)(೨ಯ + ೩)(೨ಯ + ೧)

$$\text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} = \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}}$$

$$= \frac{(೨ಯ-೫)\times(೨ಯ-೫)(೨ಯ-೧)(೩ಯ+೨)(೨ಯ+೩)(೨ಯ+೧)}{(೨ಯ-೫)(೨ಯ-೧)(೩ಯ+೨)}$$

$$= (೨ಯ-೫)(೨ಯ+೩)(೨ಯ+೧).$$

ಶ್ರೀಘ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೀತಿ : ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯ ಅವಯವವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ೧೨ಯ^{೩} ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪ಯ^{೨} ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ೪೮ಯ^{೫} ಮತ್ತು ೩೦ ಬರುವವು, ಮತ್ತು ೪ಯ^{೨} ಮತ್ತು $-$೨೮ಯ^{೨} ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ $-$೧೧೨ಯ^{೪}, ಇದನ್ನು $-$೧೬ಯ^{೪} ದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದು ಬರುವ ಶೇಷವು ೯೬ಯ^{೪}, ಇದಕ್ಕೆ ೧೨ಯ^{೩} ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ೮ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ

$$೪೮ಯ^{೫} - ೧೬ಯ^{೪} - ೨೨೪ಯ^{೩} - ೧೧೬ಯ^{೨} + ೫೩ಯ + ೩೦$$
$$= (೧೨ಯ^{೩} - ೨೮ಯ^{೨} - ೯ಯ + ೧೦)(೪ಯ^{೨} + ೮ಯ + ೩)$$

[ಬಾಯಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.]

$$\text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} = \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}}$$

$$= \frac{(೨ಯ-೫)(೧೨ಯ^{೩} - ೨೮ಯ^{೨} - ೯ಯ + ೧೦)(೪ಯ^{೨} + ೮ಯ + ೩)}{೧೨ಯ^{೩} - ೨೮ಯ^{೨} - ೯ಯ + ೧೦}$$

$$= (೨ಯ - ೫)(೪ಯ^{೨} + ೮ಯ + ೩).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ಕ್ಷ^{೩} + ೪ಕ್ಷ^{೨} − ೧೧ಕ್ಷ − ೩೦; ೨ಕ್ಷ^{೩} − ೩ಕ್ಷ^{೨} − ೫೯ಕ್ಷ + ೩೦.

೨. ೧೨ಪ^{೩} − ೨೮ಪ^{೨} + ೧೭ಪ − ೩; ೧೨ಪ^{೩} + ೮ಪ^{೨} − ೪೯ಪ + ೧೫.

೩. ೨೦ಪ^{೩} + ೭ಪ^{೨} − ಪ − ೨; ೧೦ಪ^{೩} − ೨೪ಪ^{೨} + ೨೩ಪ − ೬.

೪. ೮ಯ^{೪} ೬೨ಯ^{೩} + ೭೯ಯ^{೨} + ೩೨ಯ − ೧೨;

೮ಯ^{೪} − ೫೪ಯ^{೩} + ೮೧ಯ^{೨} + ೩೧ಯ − ೧೨.

೫. ೫ಕ್ಷ^{೪} − ೧೬ಕ್ಷ^{೩} − ೪೪ಕ್ಷ^{೨} + ೧೪೦ಕ್ಷ − ೪೮;
೪ಕ್ಷ^{೪} − ೯ಕ್ಷ^{೩} − ೪೯ಕ್ಷ^{೨} + ೭೬ಕ್ಷ + ೬೨.

೬. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ.ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೫ಕ್ಷ^{೨} + ೨೦ಕ್ಷ + ೪ ಮತ್ತು ೨೫ಕ್ಷ^{೪} + ೩೦ಕ್ಷ^{೩} − ೨೧ಕ್ಷ^{೨} − ೨೦ಕ್ಷ − ೪ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು ೨೫ಕ್ಷ^{೩} + ೪೫ಕ್ಷ^{೨} + ೨೪ಕ್ಷ + ೪ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಯಾವದು ?

೭. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು ಯ − ೫ ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ಯ^{೪} − ೨ಯ^{೩} − ೨೫ಯ^{೨} + ೨೬ಯ + ೧೨೦ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು ?

೮. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೩ನ − ೧ ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೮೧ನ^{೪} − ೪೫ನ^{೨} + ೪ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು ?

೯. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦ನ^{೨} + ೧೧ನ − ೬ ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦೦ನ^{೪} − ೨೪೧ನ^{೨} + ೩೬ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು ?

೧೦. ಮೂರು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೮ಯ^{೨} − ೧೮ಯ − ೫ ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೩೨ಯ^{೫} − ೮೦ಯ^{೪} − ೯೦ಯ^{೩} + ೭೫ಯ^{೨} + ೧೮ಯ − ೪೫ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು ?

೧೧. ಪಯ^{೩} − ೨೧ಯ^{೨} + ೪೫ಯ + ಮ ಮತ್ತು ೬ಪಯ^{೩} − ೪೫ಯ^{೨} + ೧೨೩ಯ − ಮ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ − ೬ ಇದ್ದರೆ
ಪ = ?, ಮ = ?

೧೨. ೬ಯ^{೩} + ಅಯ^{೨} + ಕಯ + ೧೦ ಮತ್ತು ಪಯ^{೩} − ೨೬ಯ^{೨} + ೬೫ಯ + ಮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ^{೨} − ೩ಯ + ೨ ಇದ್ದರೆ
ಅ = ?, ಕ = ?, ಪ = ?, ಮ = ?.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

೫·೧. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗುರುತು ಹೋದ ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯೇ (ಭಾಗ ೨. ಪು. ೧೮೧-೨೦೮) ನಮಗೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂದು ಈಗ ಮೊದಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜಳಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಅದೇ ವಿಷಯದ ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

೫·೨. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಿಸಿ ಅಂದರೆಯೇ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಎಂದು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $$\frac{೨ಅ+೪ಕ}{೨ಪ+೪ಮ}=\frac{೨(ಅ+೨ಕ)}{೨(ಪ+೨ಮ)}=\frac{ಅ+೨ಕ}{ಪ+೨ಮ}.$$

ಉ. ೨. $$\frac{೩ಕ+೯ಗ}{೫ಕ+೧೫ಗ}=\frac{೩(ಕ+೩ಗ)}{೫(ಕ+೩ಗ)}=\frac{೩}{೫}.$$

ಉ. ೩. $$\frac{ಅಯ^{೨}+೪ಅಯ}{೨ಅಯ^{೩}+೮ಅಯ}=\frac{ಅಯ(ಯ+೪)}{೨ಅಯ(ಯ^{೨}+೪)}=\frac{ಯ+೪}{೨(ಯ^{೨}+೪)}.$$

ಉ. ೪. $$\frac{ಅ^{೨}-ಕ^{೨}}{ಅ^{೨}+೨ಅಕ+ಕ^{೨}}=\frac{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{(ಅ+ಕ)^{೨}}=\frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}.$$

ಉ. ೫. $$\frac{ನ^{೩}+ಮ^{೩}}{ನ^{೪}+ನ^{೨}ಮ^{೨}+ಮ^{೪}}$$

$$=\frac{(ನ+ಮ)(ನ^{೨}-ನಮ+ಮ^{೨})}{(ನ^{೨}-ನಮ+ಮ^{೨})(ನ^{೨}+ನಮ+ಮ^{೨})}$$

$$=\frac{ನ+ಮ}{ನ^{೨}+ನಮ+ಮ^{೨}}.$$

ಉ. ೬. $\dfrac{೧೦ಯ^೨ - ೩ಯ - ೨೭}{೨೦ಯ^೨ - ೧೧ಯ - ೪೫}$

$$= \frac{(೨ಯ + ೩)(೫ಯ - ೯)}{(೪ಯ + ೫)(೫ಯ - ೯)} = \frac{೨ಯ + ೩}{೪ಯ + ೫}$$

ಉ. ೭. $\dfrac{೪ಅ^೨ - ೯ಕ^೨ - ೧೨ಅ + ೧೨ಕ + ೫}{೮ಅ^೨ - ೨೪ಅಕ + ೧೮ಕ^೨ - ೮ಅ + ೧೨ಕ + ೨}$

ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$೪ಅ^೨ - ೯ಕ^೨ - ೧೨ಅ + ೧೨ಕ + ೫$

$$= (೪ಅ^೨ - ೧೨ಅ + ೯) - (೯ಕ^೨ - ೧೨ಕ + ೪)$$
$$= (೨ಅ - ೩)^೨ - (೩ಕ - ೨)^೨$$
$$= (೨ಅ - ೩ + ೩ಕ - ೨)(೨ಅ - ೩ - ೩ಕ + ೨)$$
$$= (೨ಅ + ೩ಕ - ೫)(೨ಅ - ೩ಕ - ೧)$$

$೮ಅ^೨ - ೨೪ಅಕ + ೧೮ಕ - ೮ಅ + ೧೨ಕ + ೨$

$$= ೨(೪ಅ^೨ - ೧೨ಅಕ + ೯ಕ^೨ - ೪ಅ + ೬ಕ + ೧)$$
$$= ೨(೨ಅ - ೩ಕ - ೧)^೨$$

∴ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು

$$= \frac{(೨ಅ + ೩ಕ - ೫)(೨ಅ - ೩ಕ - ೧)}{೨(೨ಅ - ೩ಕ - ೧)^೨}$$

$$= \frac{೨ಅ + ೩ಕ - ೫}{೨(೨ಅ - ೩ಕ - ೧)}$$

ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡನೆಯದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು

ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡಲು ಬೇಕಿದ್ದರಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುವವು ಎಂದು ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದು ನಡೆಯಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{೩ಯ^{೨}+೪ಯಕ್ಷ}{೩ಯ^{೨}+೮ಯಕ್ಷ}$.

೨. $\frac{೩ಅಪ+೭ಅಬ-೫ಅಮ}{೩ಪ^{೨}+೭ಪಬ-೫ಪಮ}$.

೩. $\frac{ಅ^{೨}+ಅಕ+ಅಮ+ಕಮ}{೪ಅ+೪ಮ}$.

೪. $\frac{ಅ^{೨}-ಮ^{೨}}{ಅ^{೩}+ಮ^{೩}}$.

೫. $\frac{೪ಪ^{೨}-೨೮ಪಮ+೪೯ಮ^{೨}}{೬ಪ^{೨}-೧೯ಪಮ-೭ಮ^{೨}}$.

೬. $\frac{೬೪ಅ^{೨}+೮೦ಅಕ+೨೫ಕ^{೨}}{೧೬ಅ^{೨}-೨೨ಅಕ-೨೦ಕ^{೨}}$.

೭. $\frac{೬ಯ^{೨}-೫ಯ+೧}{೧೨ಯ^{೨}-೭ಯ+೧}$.

೮. $\frac{೧೦ಕ್ಷ^{೨}+೭ಕ್ಷ-೧೨}{೧೬ಕ್ಷ^{೨}+೧೪ಕ್ಷ-೧೫}$.

೯. $\frac{ಯ^{೩}-೫ಯ^{೨}-೪ಯ+೨೦}{ಯ^{೩}-ಯ^{೨}-೩೨ಯ+೬೦}$.

೧೦. $\frac{೧೦ಪ^{೩}-೨೭ಪ^{೨}+೨೦ಪ-೩}{೧೦ಪ^{೩}+೩ಪ^{೨}-೩೧ಪ+೬}$.

೧೧. $\frac{೪ಯ^{೩}+೧೧ಯ^{೨}+೭ಯ+೨}{೧೬ಯ^{೪}-ಯ^{೨}+೧}$.

೧೨. $\frac{ನ^{೩}-೨ನ^{೨}-೨೯ನ-೪೨}{ನ^{೩}-೩೯ನ-೭೦}$.

೧೩. $\frac{ಮ^{೩}+೨ಮ^{೨}-೨೩ಮ-೬೦}{ಮ^{೪}-೩೪ಮ^{೨}-೨೨೫}$.

೧೪. $\frac{ಮ^{೪}-೨೦ಮ^{೨}+೬೪}{ಮ^{೪}-೪ಮ^{೩}-೧೨ಮ^{೨}+೩೨ಮ+೬೪}$.

೧೫. $\frac{ಯ^{೩}-೨೪ಯ^{೨}+೧೯೨ಯ-೫೧೨}{ಯ^{೩}-೮ಯ^{೨}-೬೪ಯ+೫೧೨}$.

೧೬. $\frac{ಪ^{೪}-೨೫೬ಮ^{೪}}{೬ಪ^{೪}-೯೫ಪ^{೨}ಮ^{೨}-೧೬ಮ^{೪}}$.

೧೭. $\frac{(೨ಯ+೧)(೨ಯ+೩)(೨ಯ+೫)(೨ಯ+೭)+೧೫}{೮ಯ^{೪}+೬೪ಯ^{೩}+೧೬೮ಯ^{೨}-೫೦}$.

೧೮. $$\frac{ಅ^{೬} - ೬೪ಕ^{೬}}{ಅ^{೬} + ೮ಅ^{೪}ಕ^{೨} + ೩೨ಅ^{೨}ಕ^{೪} + ೬೪ಕ^{೬}}.$$

೧೯. $$\frac{೨೫ಅ^{೨} - ೯ಕ^{೨} + ೪ಗ^{೨} + ೨೦ಅಗ}{೨೫ಅ^{೨} - ೯ಕ^{೨} - ೪ಗ^{೨} + ೧೨ಕಗ}.$$

೨೦. $$\frac{ಅ^{೪} - ೧೦ಅ^{೩} + ೩೫ಅ^{೨} - ೫೦ಅ + ೨೪}{ಅ^{೪} - ೨ಅ^{೩} - ೧೩ಅ^{೨} + ೧೪ಅ + ೨೪}.$$

೨.

ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ.

೫೩. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪ್ರ.೧೧, ಪ್ರ.೧೩೦-೧೩೮) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅಂಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಛೇದಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಯಾವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬರುವದೋ ಅದೇ ಇರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ್ಗೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ **ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು** ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಎಲ್ಲ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಬೇರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು.

ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದೆ. ಈಗ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಲ್ಲಿ ತೋರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಕೊನೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು) ಅತಿ ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $$\frac{\text{ಟ}^{\text{೨}}-\text{ಕ}^{\text{೨}}}{\text{ಟ}^{\text{೩}}+\text{ಕ}^{\text{೩}}}\times\frac{\text{ಟ}^{\text{೪}}+\text{ಟ}^{\text{೨}}\text{ಕ}^{\text{೨}}+\text{ಕ}^{\text{೪}}}{\text{ಟ}^{\text{೨}}-\text{೨ಟಕ}+\text{ಕ}^{\text{೨}}}$$

$$=\frac{(\text{ಟ}+\text{ಕ})(\text{ಟ}-\text{ಕ})}{(\text{ಟ}+\text{ಕ})(\text{ಟ}^{\text{೨}}-\text{ಟಕ}+\text{ಕ}^{\text{೨}})}\times\frac{(\text{ಟ}^{\text{೨}}-\text{ಟಕ}+\text{ಕ}^{\text{೨}})(\text{ಟ}^{\text{೨}}+\text{ಟಕ}+\text{ಕ}^{\text{೨}})}{(\text{ಟ}-\text{ಕ})^{\text{೨}}}$$

$$=\frac{\text{ಟ}^{\text{೨}}+\text{ಟಕ}+\text{ಕ}^{\text{೨}}}{\text{ಟ}-\text{ಕ}}.$$

ಉ. ೨. $$\frac{\text{ಯ}^{\text{೪}}+\text{೪ಕ್ಷ}^{\text{೪}}}{\text{೬ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧೧ಯಕ್ಷ}-\text{೧೦ಕ್ಷ}^{\text{೨}}}\div\frac{\text{ಯ}^{\text{೩}}+\text{ಯ}^{\text{೨}}\text{ಕ್ಷ}-\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೩}}}{\text{೮ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧೪ಯಕ್ಷ}-\text{೧೫ಕ್ಷ}^{\text{೨}}}$$

$$=\frac{\text{ಯ}^{\text{೪}}+\text{೪ಕ್ಷ}^{\text{೪}}}{\text{೬ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧೧ಯಕ್ಷ}-\text{೧೦ಕ್ಷ}^{\text{೨}}}\times\frac{\text{೮ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧೪ಯಕ್ಷ}-\text{೧೫ಕ್ಷ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೩}}+\text{ಯ}^{\text{೨}}\text{ಕ್ಷ}-\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೩}}}$$

$$=\frac{(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})^{\text{೨}}-\text{೪ಯ}^{\text{೨}}\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}}{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೩ಯ}+\text{ಕ್ಷ})}\times\frac{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೪ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ಕ್ಷ}^{\text{೩}}+\text{ಯ}^{\text{೨}}\text{ಕ್ಷ}-\text{ಕ್ಷ}^{\text{೩}}}$$

$$=\frac{(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})(\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೩ಯ}+\text{ಕ್ಷ})}$$

$$\times\frac{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೪ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ಕ್ಷ}^{\text{೩}}+\text{ಕ್ಷ}(\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}$$

$$=\frac{(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})(\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೩ಯ}+\text{ಕ್ಷ})}$$

$$\times\frac{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೪ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})}{(\text{ಯ}-\text{ಕ್ಷ})\{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ಯಕ್ಷ}+\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}+\text{ಕ್ಷ}(\text{ಯ}+\text{ಕ್ಷ})\}}$$

$$=\frac{(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})(\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೩ಯ}+\text{ಕ್ಷ})}$$

$$\times\frac{(\text{೨ಯ}-\text{೫ಕ್ಷ})(\text{೪ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})}{(\text{ಯ}-\text{ಕ್ಷ})(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}$$

$$=\frac{(\text{೪ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})(\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨ಯಕ್ಷ}+\text{೨ಕ್ಷ}^{\text{೨}})}{(\text{೩ಯ}+\text{ಕ್ಷ})(\text{ಯ}-\text{ಕ್ಷ})}.$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು.

ಉ. ೯. $$\frac{೬ಪ^2 - ೨೨ಪ - ೮}{೪ಪ^2 + ೧೮ಪ + ೮} \times \frac{ಪ^4 + ೧೬ಪ^2 + ೨೫೬}{ಪ^3 - ೩ಪ^2 + ೧೨ಪ + ೧೬} \div \frac{೨ಪ^2 - ೩೨}{೩ಪ^2 - ೧೫ಪ - ೧೦೮}$$

$$= \frac{೨(೩ಪ^2 - ೧೧ಪ - ೪)}{೨(೨ಪ^2 + ೯ಪ + ೪)} \times \frac{(ಪ^2 + ೧೬)^2 - ೧೬ಪ^2}{ಪ^3 + ಪ^2 - ೪ಪ^2 - ೪ಪ + ೧೬ಪ + ೧೬} \times \frac{೩(ಪ^2 - ೫ಪ - ೩೬)}{೨(ಪ^2 - ೧೬)}$$

$$= \frac{೨(ಪ - ೪)(೩ಪ + ೧)}{(ಪ + ೪)(೨ಪ + ೧)} \times \frac{(ಪ^2 - ೪ಪ + ೧೬)(ಪ^2 + ೪ಪ + ೧೬)}{ಪ^2(ಪ + ೧) - ೪ಪ(ಪ + ೧) + ೧೬(ಪ + ೧)} \times \frac{೩(ಪ + ೪)(ಪ - ೯)}{೨(ಪ - ೪)(ಪ^2 + ೪ಪ + ೧೬)}$$

$$= \frac{೨(ಪ - ೪)}{(ಪ + ೪)} \times \frac{(ಪ^2 - ೪ಪ + ೧೬)(ಪ^2 + ೪ಪ + ೧೬)}{(ಪ + ೧)(ಪ^2 - ೪ಪ + ೧೬)} \times \frac{೩(ಪ + ೪)(ಪ - ೯)}{೨(ಪ - ೪)(ಪ^2 + ೪ಪ + ೧೬)}$$

$$= \frac{೩(ಪ - ೯)}{ಪ + ೧}.$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭ-ವಿರುವದೋ ಅವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತರ್ಕಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧೦. $$\frac{೬ಯ^3 + ೧೧ಯ^2 + ಯ - ೪}{೧೨ಯ^3 + ೫ಯ^2 - ೧೧ಯ - ೬}$$

೧೨ಯ^{೩} + ೧೭ಯ^{೨} − ೧೫ಯ − ೧೪
× ೬ಯ^{೩} + ೩೫ಯ^{೨} + ೬೬ಯ + ೪೦

೮ಯ^{೩} + ೧೮ಯ^{೨} + ೩ಯ − ೭
÷ ೯ಯ^{೩} − ೫ಯ^{೨} − ೩೮ಯ − ೨೪

ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೬ಯ^{೩} + ೧೧ಯ^{೨} + ಯ − ೪

= ೬ಯ^{೩} + ೬ಯ^{೨} + ೫ಯ^{೨} + ೫ಯ − ೪ಯ − ೪

= ೬ಯ^{೨}(ಯ + ೧) + ೫ಯ(ಯ + ೧) − ೪(ಯ + ೧)

= (ಯ + ೧)(೬ಯ^{೨} + ೫ಯ − ೪)

= (ಯ + ೧)(೨ಯ − ೧)(೩ಯ + ೪)

೧೨ಯ^{೩} + ೫ಯ^{೨} − ೧೧ಯ − ೬

= ೧೨ಯ^{೩} − ೧೨ಯ^{೨} + ೧೭ಯ^{೨} − ೧೭ಯ + ೬ಯ − ೬

= ೧೨ಯ^{೨}(ಯ − ೧) + ೧೭ಯ(ಯ − ೧) + ೬(ಯ − ೧)

= (ಯ − ೧)(೧೨ಯ^{೨} + ೧೭ಯ + ೬)

= (ಯ − ೧)(೩ಯ + ೨)(೪ಯ + ೩)

೧೨ಯ^{೩} + ೧೭ಯ^{೨} − ೧೫ಯ − ೧೪

= ೧೨ಯ^{೩} − ೧೨ಯ^{೨} + ೨೯ಯ^{೨} − ೨೯ಯ + ೧೪ಯ − ೧೪

= ೧೨ಯ^{೨}(ಯ − ೧) + ೨೯ಯ(ಯ − ೧) + ೧೪(ಯ − ೧)

= (ಯ − ೧)(೧೨ಯ^{೨} + ೨೯ಯ + ೧೪)

= (ಯ − ೧)(೩ಯ + ೨)(೪ಯ + ೭)

೬ಯ^{೩} + ೩೫ಯ^{೨} + ೬೬ಯ + ೪೦

= ೬ಯ^{೩} + ೧೨ಯ^{೨} + ೨೩ಯ^{೨} + ೪೬ಯ + ೨೦ಯ + ೪೦

= ೬ಯ^{೨}(ಯ + ೨) + ೨೩ಯ(ಯ + ೨) + ೨೦(ಯ + ೨)

= (ಯ + ೨)(೬ಯ^{೨} + ೨೩ಯ + ೨೦)

= (ಯ + ೨)(೨ಯ + ೫)(೩ಯ + ೪)

೮ಯ^{೩} + ೧೮ಯ^{೨} + ೩ಯ − ೭

= ೮ಯ^{೩} + ೮ಯ^{೨} + ೧೦ಯ^{೨} + ೧೦ಯ − ೭ಯ − ೭

$= ೮ಯ^{೨}(ಯ+೧)+೧೦ಯ(ಯ+೧)-೭(ಯ+೧)$

$= (ಯ+೧)(೮ಯ^{೨}+೧೦ಯ-೭)$

$= (ಯ+೧)(೨ಯ-೧)(೪ಯ+೭)$

$೪ಯ^{೩}-೫ಯ^{೨}-೩೮ಯ-೨೪$

$= ೪ಯ^{೩}+೮ಯ^{೨}-೧೩ಯ^{೨}-೨೬ಯ-೧೨ಯ-೨೪$

$= ೪ಯ^{೨}(ಯ+೨)-೧೩ಯ(ಯ+೨)-೧೨(ಯ+೨)$

$= (ಯ+೨)(೪ಯ^{೨}-೧೩ಯ-೧೨)$

$= (ಯ+೨)(ಯ-೪)(೪ಯ+೩)$

$\therefore$ ರಾಶಿಯು

$$= \frac{(ಯ+೧)(೨ಯ-೧)(೩ಯ+೪)}{(ಯ-೧)(೩ಯ+೨)(೪ಯ+೩)} \times \frac{(ಯ-೧)(೩ಯ+೨)(೪ಯ+೭)}{(ಯ+೨)(೨ಯ+೫)(೩ಯ+೪)} \times \frac{(ಯ+೨)(ಯ-೪)(೪ಯ+೩)}{(ಯ+೧)(೨ಯ-೧)(೪ಯ+೭)}$$

$$= \frac{ಯ-೪}{೨ಯ+೫}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\dfrac{ಅ^{೨}-ಮ^{೨}}{೨ಅ^{೨}-೪ಅಮ+೨ಮ^{೨}} \times \dfrac{೨ಅ^{೩}-೨ಮ^{೩}}{ಅ^{೩}+ಮ^{೩}}.$

೨. $\dfrac{ಪ^{೩}-ಬ^{೩}}{ಪ^{೪}+ಪ^{೨}ಬ^{೨}+ಬ^{೪}} \times \dfrac{೫ಪ^{೩}+೫ಬ^{೩}}{೮ಪ^{೨}-೮ಬ^{೨}}.$

೩. $\dfrac{೪ಕ್ಷ^{೨}-೪ಕ್ಷ-೧೫}{೧೨ಕ್ಷ^{೨}+೨೯ಕ್ಷ+೧೪} \times \dfrac{೧೨ಕ್ಷ^{೨}+೧೩ಕ್ಷ-೧೪}{೬ಕ್ಷ^{೨}-೧೯ಕ್ಷ+೧೦}.$

೪. $\dfrac{೧೦ನ^{೨}-೪೬ನ+೨೪}{೬ನ^{೨}-೨೭ನ+೧೨} \times \dfrac{೬ನ^{೨}-೧೫ನ+೬}{೧೦ನ^{೨}-೨೬ನ+೧೨}.$

೫. $$\frac{೪ಅ^2 - ೪ಸ^2}{೫ಅ^4 + ೫ಸ^4} \div \frac{೩ಅ - ೩ಸ}{ಅ^4 + ಅ^2ಸ^2 + ಸ^4}.$$

೬. $$\frac{ಅ^2 - ೯ಅ + ೨೦}{೨ಅ^2 - ೧೩ಅ + ೧೫} \div \frac{ಅ^2 + ೩ಅ - ೨೮}{೨ಅ^2 + ೧೧ಅ - ೨೧}.$$

೭. $$\frac{೪೦ಯ^2 - ೮೪ಯ + ೩೬}{೫ಯ^2 - ೩೮ಯ + ೨೧} \div \frac{೬ಯ^2 - ೫೧ಯ + ೬೩}{೪ಯ^2 - ೪೨ಯ + ೯೮}.$$

೮. $$\frac{೧೦ಯ^2 + ೧೭ಯಕ್ಷ + ೩ಕ್ಷ^2}{೬ಯ^2 - ೫ಯಕ್ಷ + ಕ್ಷ^2} \times \frac{೮ಯ^2 - ೨ಯಕ್ಷ - ಕ್ಷ^2}{೨೦ಯ^2 + ೯ಯಕ್ಷ + ಕ್ಷ^2}.$$

೯. $$\frac{೧೦ಅ^2 + ೩ಅಕ - ಕ^2}{೬ಅ^2 + ಅಕ - ಕ^2} \div \frac{೮ಅ^2 - ೬ಅಕ + ಕ^2}{೧೫ಅ^2 - ೮ಅಕ + ಕ^2}.$$

೧೦. $$\frac{ಮ^3 + ೫ಮ^2 - ೨ಮ - ೨೪}{ಮ^3 + ೧೮ಮ^2 + ೧೦೭ಮ + ೨೧೦} \times \frac{ಮ^3 + ೧೫ಮ^2 + ೭೪ಮ + ೧೨೦}{ಮ^3 + ೧೨ಮ^2 + ೪೭ಮ + ೬೦}.$$

೧೧. $$\frac{೨ಸ^3 - ೩ಸ^2 - ೯ಸ + ೧೦}{೪ಸ^3 + ೨೧ಸ^2 + ೨೯ಸ + ೬} \div \frac{೨ಸ^3 + ೧೭ಸ^2 + ೪೨ಸ - ೪೫}{೪ಸ^3 - ೭ಸ^2 - ೧೪ಸ - ೩}.$$

೧೨. $$\frac{ಅ^2 + ೩ಅ + ೨}{ಅ^2 + ೫ಅ + ೬} \times \frac{ಅ^2 + ೭ಅ + ೧೨}{ಅ^2 + ೯ಅ + ೨೦} \times \frac{ಅ^2 + ೧೧ಅ + ೩೦}{ಅ^2 + ೧೩ಅ + ೪೨}.$$

೧೩. $$\frac{೪ಪ^2 - ಮ^2}{೮ಪ^3 + ಮ^3} \times \frac{೧೦ಪ^2 + ೩ಪಮ - ಮ^2}{೪ಪ^2 - ೪ಪಮ + ಮ^2} \div \frac{೧೫ಪ^2 + ೨ಪಮ - ಮ^2}{೬ಪ^2 - ಪಮ - ಮ^2}.$$

೧೪. $$\frac{೨೫ಅ^2 - ೪ಕ^2}{೨ಅ^2 + ೭ಅಕ - ೪ಕ^2} \times \frac{೪ಅ^2 - ಕ^2}{೫ಅ^2 - ೧೮ಅಕ - ೮ಕ^2} \times \frac{ಅ^2 - ೧೬ಕ^2}{೧೦ಅ^2 + ಅಕ - ೨ಕ^2}.$$

೧೫. $$\frac{೨೭ಯ^3 - ೨೭ಯ^2 + ೯ಯ - ೧}{೬ಯ^2 - ೧೩ಯ - ೫} \times \frac{೨ಯ^2 + ೯ಯ + ೧೦}{೬ಯ^2 + ೧೩ಯ - ೫}$$

$$\div \frac{೨ಯ^{೨} - ೭ಯ + ೩}{೬ಯ^{೨} + ೧೭ಯ + ೫}.$$

೧೬. $\frac{ಪ^{೩} - ೧೬ಪ}{೬೪ಪ^{೩} - ೧} \div \frac{೮ಪ^{೨} - ೨೬ಪ - ೧೫}{೨೫೬ಪ^{೪} + ೧೬ಪ^{೨} + ೧} \div \frac{ಪ^{೪} + ೨೫ಪ^{೨} + ೬೫}{೩೨ಪ^{೨} + ೪ಪ - ೩}.$

೧೭. $\frac{೨ಸ^{೨} - ೩ಸಮ - ೨ಮ^{೨}}{೨ಸ^{೨} + ೩ಸಮ - ೨ಮ^{೨}}$

$\div \left(\frac{೬ಸ^{೨} - ೭ಸಮ - ೫ಮ^{೨}}{ಸ^{೨} + ೫ಸಮ + ೬ಮ^{೨}} \times \frac{೩ಸ^{೨} + ೨ಸಮ - ೧೬ಮ^{೨}}{೬ಸ^{೨} - ೧೩ಸಮ + ೫ಮ^{೨}} \right).$

೧೮. $\frac{ರ^{೪} + ರ^{೨}ಲ^{೨} + ಲ^{೪}}{೫ರ^{೨} - ೨೪ರಲ - ೫ಲ^{೨}}$

$\div \left(\frac{೪ರ^{೨} - ೪ರಲ + ೪ಲ^{೨}}{ರ^{೨} - ೨೫ಲ^{೨}} \div \frac{೧೨೫ರ^{೩} - ಲ^{೩}}{೫ರ^{೨} + ೨೪ರಲ - ೫ಲ^{೨}} \right).$

೧೯. $\frac{೨ಅ^{೪} + ೮}{ಅ^{೪} + ಅ^{೨} + ೧} \div \frac{ಅ^{೩} + ಅ^{೨} - ೨}{ಅ^{೩} + ೧} \times \frac{ಅ^{೩} - ೧}{ಅ^{೩} - ಅ^{೨} + ೨}.$

೨೦. $\frac{ಯ^{೩} - ಪ^{೩}}{ಯ^{೩} + ಪ^{೩}} \times \frac{ಯ^{೨} + ಪಯ + ಮಯ + ಪಮ}{ಯ^{೪} + ಪ^{೨}ಯ^{೨} + ಪ^{೪}} \div \frac{ಯ^{೨} - ಪ^{೨}}{ಯ^{೩} + ಪ^{೩}}.$

೬.

ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ

೬·೧. ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು ಆವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಡುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪ್ರ೧೦. ಪು. ೧೯೯—೨೦೩) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರದೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜಳಣೆಯನ್ನು ಇಂದು ಮಾಡುವಾ.

೬·೨ ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವು

ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೌಲ್ಯವು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಛೇದವು **(ಸಮಚ್ಛೇದವು)** ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಕಿರಿದು **(ಲಘುತಮ)** ಇರುವ ಹಾಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{೩}{೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೩}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಕ್ಕರೆ ಅವುಗಳನ್ನು $\frac{೯}{೧೨}$ ಮತ್ತು $\frac{೮}{೧೨}$ ಎಂದೂ, $\frac{೧೮}{೨೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೧೬}{೨೪}$ ಎಂದೂ, $\frac{೪೫}{೬೦}$ ಮತ್ತು $\frac{೪೦}{೬೦}$ ಎಂದು ಅನೇಕ ಬಗೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ, ಇಲ್ಲವೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ, ಸುಲಭತೆಯ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲತೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅವುಗಳ **ಸಮಚ್ಛೇದವು ಲಘುತಮ**ವಿರುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಈ ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದವೆಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಛೇದಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲು ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಎಲ್ಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಹಜವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗದಿರಲೆಂದು ಛೇದವು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಷ್ಟು ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಮೂಲ ಛೇದವನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದರಿಂದಲೇ ಅಂಶವನ್ನುವದೂ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೨}{೩}, \frac{೧}{೪}, \frac{೩}{೫}, \frac{೭}{೧೨}, \frac{೧೧}{೧೫}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವವಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೬೦** ಇದ್ದುದರಿಂದ $\frac{೨ \times ೨೦}{೩ \times ೨೦}, \frac{೧ \times ೧೫}{೪ \times ೧೫}, \frac{೩ \times ೧೨}{೫ \times ೧೨},$

$\frac{೭\times೬}{೧೦\times೬}, \frac{೫\times೫}{೧೨\times೫}$ ಎಂದು, ಅಂದರೆಯೇ $\frac{೪೨}{೬೦}, \frac{೧೫}{೬೦}, \frac{೩೬}{೬೦}, \frac{೪೩}{೬೦}, \frac{೩೫}{೬೦}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರಂತೆಯೇ $\frac{ಪ}{ಯ}, \frac{ಬ}{ಲ}, \frac{ಮ}{ವ}$ ಇವುಗಳನ್ನು $\frac{ಪಲವ}{ಯಲವ}, \frac{ಬಯವ}{ಯಲವ}, \frac{ಮಯಲ}{ಯಲವ}$ ಎಂದೂ, $\frac{ಕ}{ರಸ}, \frac{ಗ}{ಸಕ್ಷ}, \frac{ಘ}{ರಕ್ಷ}$, ಇವುಗಳನ್ನು $\frac{ಕಕ್ಷ}{ರಸಕ್ಷ}, \frac{ಗರ}{ರಸಕ್ಷ}, \frac{ಘಸ}{ರಸಕ್ಷ}$ ಎಂದೂ, ಇಲ್ಲವೆ $\frac{ಅ}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)}, \frac{ಕ}{(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}, \frac{ಗ}{(ಲ+ಯ)(ಯ+ರ)}$ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{ಅ(ಲ+ಯ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(+ಲಯ)}, \frac{ಕ(ಯ+ರ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ-ಯ)}, \frac{ಗ(ರ+ಲ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆದನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹೊಸ ಅಂಶವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುತ್ತದೆ. ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಸಮಚ್ಛೇದದ ಯಾವ ಅವಯವಗಳುಳಿಯುವವೋ ಅವುಗಳಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಹೊಸ ಸಮಚ್ಛೇದರೂಪ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವಿರುವದು.

ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{೫}{ಯ^೨+೬ಯ+೫}, \frac{೨}{ಯ^೨+೪ಯ-೫}, \frac{೩}{ಯ^೨-೧}$. ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು **ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದ** ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಛೇದಗಳ **ಲ.ಸಾ.ವಿ.** ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಮತ್ತು **ಲ ಸಾ. ವಿ.** ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಛೇದಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿ,

$$\frac{೫}{ಯ^೨+೬ಯ+೫} = \frac{೫}{(ಯ+೧)(ಯ+೫)};\ \frac{೩}{ಯ^೨+೪ಯ-೫} = \frac{೩}{(ಯ-೧)(ಯ+೫)};\ \text{ಮತ್ತು}\ \frac{೨}{ಯ^೨-೧} = \frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. $(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)$. ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{೫(ಯ-೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)},\ \frac{೩(ಯ+೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)},\ \text{ಮತ್ತು}\ \frac{೨(ಯ+೫)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)};$$ ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪಗಳು.

ಉ. ೨. $\frac{೩}{೮ಯ^೩-ರ^೩},\ \frac{೧}{೮ಯ^೩+ರ^೩},\ \frac{೨}{೪ಯ^೨-ರ^೨},$

$\frac{೪}{೧೬ಯ^೪-೪ಯ^೨ರ^೨+ರ^೪}$. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. $೬೪ಯ^೬-ರ^೬$ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $\frac{೩(೮ಯ^೩+ರ^೩)}{೬೪ಯ^೬-ರ^೬},\ \frac{೮ಯ^೩-ರ^೩}{೬೪ಯ^೬-ರ^೬},$

$$\frac{೨(೧೬ಯ^೪+೪ಯ^೨ರ^೨+ರ^೪)}{೬೪ಯ^೬-ರ^೬},\ \frac{೪(೪ಯ^೨-ರ^೨)}{೬೪ಯ^೬-ರ^೬}$$

ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪಗಳು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{೨}{ಅ-ಕ},\ \frac{೨}{ಅ+ಕ}$. ೨. $\frac{೫}{೨ಅ+೩ಕ},\ \frac{೭}{೩ಅ-೨ಕ}$.

೩. $\frac{೭}{೧೬ಅ-೪ಗ},\ \frac{೩}{೮ಅ+೧೨ಗ}$. ೪. $\frac{೨ಪ}{೩ಯ+೯ರ},\ \frac{೩ಪ}{೪ಯ+೧೨ರ}$.

೫. $\frac{೨}{ಯ^೨-೬ಯ+೮},\ \frac{೩}{ಯ^೨-೭ಯ+೧೨}$.

೬. $\frac{ಅ}{೨ರ^{೨} - ೯ರ - ೫}$, $\frac{೨ಅ}{೨ರ^{೨} + ೧೫ರ + ೭}$.

೭. $\frac{೫ಪ}{೬ಯ^{೨} - ಯರ - ೧೨ರ^{೨}}$, $\frac{೮ಪ}{೧೫ಯ^{೨} + ೧೪ಯರ - ೮ರ^{೨}}$.

೮. $\frac{೧}{ಅ^{೨} + ೬ಅ + ೮}$, $\frac{೪}{ಅ^{೨} - ಅ - ೨೦}$, $\frac{೨}{ಅ^{೨} - ೩ಅ - ೧೦}$.

೯. $\frac{೧}{ಅ^{೨} - ಕ^{೨}}$, $\frac{೧}{ಅ^{೨} - ೨ಅಕ + ಕ^{೨}}$, $\frac{೧}{ಅ^{೨} + ೨ಅಕ + ಕ^{೨}}$.

೧೦. $\frac{೧}{ಯ^{೩} - ರ^{೩}}$, $\frac{೧}{ಯ^{೩} + ರ^{೩}}$, $\frac{೧}{ಯ^{೨} - ರ^{೨}}$, $\frac{೧}{ಯ^{೪} + ಯ^{೨}ರ^{೨} + ರ^{೪}}$.

೧೧. $\frac{೧}{(ಯ - ರ)(ರ - ಲ)}$, $\frac{೨}{(ರ - ಲ)(ಲ - ಯ)}$, $\frac{೩}{(ಲ - ಯ)(ಯ - ರ)}$.

೧೨. $\frac{೩ಅ}{೪ಯ^{೨} - ೨೫ರ^{೨}}$, $\frac{೨ಅ}{೪೯ಯ^{೨} - ೧೬ರ^{೨}}$, $\frac{ಅ}{೧೪ಯ^{೨} - ೨೭ಯರ - ೨೦ರ^{೨}}$.

೪.

ಸಂಕಲನ* (ಬೇರೀಜು) ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ* (ವಜಾಬಾಕಿ).

೫೬. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶವೇನು? ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಇರುವದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೨}{೩}$, $\frac{೧}{೪}$, $\frac{೩}{೫}$, $\frac{೭}{೧೦}$, $\frac{೧೧}{೧೨}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ನಾವು ೮. ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ತರುವಾಯ ಆ ರೂಪಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೇರೀಜು ಅಂಶವಿದ್ದು ಸಮಚ್ಛೇದವಿರುವ ಛೇದವುಳ್ಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು.

ಹೇಗೆಂದರೆ, $\frac{೨}{೩} + \frac{೧}{೪} + \frac{೩}{೫} + \frac{೭}{೧೦} + \frac{೧೧}{೧೨} = \frac{೪೦}{೬೦} + \frac{೧೫}{೬೦} + \frac{೩೬}{೬೦} + \frac{೪೨}{೬೦} + \frac{೫೫}{೬೦}$

$$= \frac{೪೦ + ೧೫ + ೩೬ + ೪೨ + ೫೫}{೬೦} = \frac{೧೮೮}{೬೦} = \frac{೪೭}{೧೫}.$$

ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯು-ವದಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಹೊಸ ಅಂಶ-ಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಂತರವು ಅಂಶವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಸಮಚ್ಛೇದ ಇದು ಛೇದವುಳ್ಳ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-ಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\frac{೭}{೧೦} - \frac{೫}{೧೨} = \frac{೪೨}{೬೦} - \frac{೨೫}{೬೦}* = \frac{೪೨ - ೨೫}{೬೦} = \frac{೧೭}{೬೦}.$$

ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಆಂಕಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳದಿರುವದೋ ಅದೇ ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳದಾದರೂ ಇರುವದು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಆಂಕಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ, ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಆಂಕಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ಇನ್ನಿತರ ವರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಉಪಪತ್ತಿಯು ಒಂದೇ. ನಮಗೆ $\frac{ಜ}{ಅ+ಪ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಇ}{ಅ+ಮ}$ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{ಜ}{ಅ+ಪ} + \frac{ಇ}{ಅ+ಮ}$

$$= \frac{ಜ(ಅ+ಮ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)} + \frac{ಇ(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)ಅ+ಮ)}*$$

$$= \frac{ಜ(ಅ+ಮ)+ಇ(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)}$$

$$= \frac{ಲಅ+ಇಪ+ಜಮ}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)}$$ ಇರುವದು,

* ಪೂರ್ವಕಾಲದ ಆಚಾರ್ಯರು ತಮ್ಮ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಬೇರೀಜಿಗಾಗಿ, ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ವಿಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಮತ್ತು ಅವೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{ಜ}{ಅ+ಪ} - \frac{ಇ}{ಅ+ಮ} = \frac{ಜ(ಅ+ಮ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)} - \frac{ಇ(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)}*$$

$$= \frac{\text{೫}(\text{ಅ}+\text{ಮ})-\text{೩}(\text{ಅ}+\text{ಪ})}{(\text{ಅ}+\text{ಪ})(\text{ಅ}+\text{ಮ})}$$

$$= \frac{\text{೨ಅ}-\text{೩ಪ}+\text{೫ಮ}}{(\text{ಅ}+\text{ಪ})(\text{ಅ}+\text{ಮ})} \text{ ಇರುವದು.}$$

ಹಿಂದಿನ ಅನುವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\frac{\text{೫}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೬ಯ}+\text{೫}}+\frac{\text{೩}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೪ಯ}-\text{೫}}+\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧}}$$

$$= \frac{\text{೫}}{(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}+\frac{\text{೩}}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}+\frac{\text{೨}}{(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}-\text{೧})}$$

$$= \frac{\text{೫}(\text{ಯ}-\text{೧})}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}+\frac{\text{೩}(\text{ಯ}+\text{೧})}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}+\frac{\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೫})}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})} \; *$$

$$= \frac{\text{೫}(\text{ಯ}-\text{೧})+\text{೩}(\text{ಯ}+\text{೧})+\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೫})}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})\text{ಯ}+\text{೫})}$$

$$= \frac{\text{೫ಯ}-\text{೫}+\text{೩ಯ}+\text{೩}+\text{೨ಯ}+\text{೧೦}}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}$$

$$= \frac{\text{೧೦ಯ}+\text{೮}}{(\text{ಯ}-\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೧})(\text{ಯ}+\text{೫})}$$

* ಈ ಚಿನ್ಹದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಹಂತವು ಅಷ್ಟು ಅವಶ್ಯಕವಲ್ಲ. ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ನಂತರ ಅದನ್ನು ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

೫. ೬. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ (೧) ಭೇದಗಳು ಗುಣಕಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ

ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು (೨) ತರುವಾಯ ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಅಂದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು. (೩) ಆನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಛೇದವನ್ನು ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದದೊಳಗಿಂದ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಅವಯವಗಳಿಂದ ಅದರ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸುವದು. (೪) ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವಂತೆ ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನಾಗಲಿ, ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಬೇರೀಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಯಾವುದರ ಅಂಶವು ಮತ್ತು ಸಮಚ್ಛೇದ ಇದು ಯಾವುದರ ಛೇದ ವಿರುವದೋ ಅದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಉತ್ತರ.

೫.೮. ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪೃ, ೨೦೪–೨೦೭) ತುಸು ಮಾಡಲಾಗಿದ್ದು ಅಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿವೆ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $$\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೧೦ಯ}+\text{೨೪}}+\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೧೪ಯ}+\text{೪೮}}$$

$$=\frac{\text{೨}}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})}+\frac{\text{೨}}{(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

$$=\frac{\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೮})}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}+\frac{\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೪})}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

$$=\frac{\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೮})+\text{೨}(\text{ಯ}+\text{೪})}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

$$=\frac{\text{೪ಯ}+\text{೨೪}}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

$$=\frac{\text{೪}(\text{ಯ}+\text{೬})}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೬})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

$$=\frac{\text{೪}}{(\text{ಯ}+\text{೪})(\text{ಯ}+\text{೮})}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲು ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ಮೇಲೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿವೆ. ತರುವಾಯ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳ ಜೇರಿಜನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ನಂತರ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ (ಸಮಚ್ಛೇದ) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಇಷ್ಟ ಬೇರೀಜನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದಾಗ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಇಷ್ಟ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

ಉ ೨. $\frac{೧೫ಅ}{೧೨ರ^೨+೧೧ರ-೧೫} - \frac{೧೦ಅ}{೮ರ^೨+೧೪ರ-೧೫}$

$$= ೫ಅ\left\{\frac{೩}{೧೨ರ^೨+೧೧ರ-೧೫} - \frac{೨}{೮ರ^೨+೧೪ರ-೧೫}\right\}$$

$$= ೫ಅ\left\{\frac{೩}{(೩ರ+೫)(೪ರ-೩)} - \frac{೨}{(೨ರ+೫)(೪ರ-೩)}\right\}$$

$$= ೫ಅ \times \frac{೩(೨ರ+೫)-೨(೩ರ+೫)}{(೨ರ+೫)(೩ರ+೫)(೪ರ-೩)}$$

$$= ೫ಅ \times \frac{೫}{(೨ರ+೫)(೩ರ+೫)(೪ರ-೩)}$$

$$= \frac{೨೫ಅ}{(೨ರ+೫)(೩ರ+೫)(೪ರ+೫)}$$

ಉ. ೩.

$$\frac{೪}{೨ಯ^{೨}+೫ಯಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ^{೨}}+\frac{೧೩}{೪ಯ^{೨}+೧೧ಯಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ^{೨}}$$

$$+\frac{೨}{೮ಯ^{೨}-೬ಯಕ್ಷ+ಕ್ಷ^{೨}}$$

$$=\frac{೪}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ-ಕ್ಷ)}+\frac{೧೩}{(ಯ÷೩ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$+\frac{೨}{(೨ಯ-ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$=\frac{೪(ಯ-ಕ್ಷ)+೧೩(೨ಯ-ಕ್ಷ)+೨(ಯ+೩ಕ್ಷ)}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ-ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$=\frac{೧೬ಯ-೪ಕ್ಷ+೨೬ಯ-೧೩ಕ್ಷ+೨ಯ+೬ಕ್ಷ}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ-ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$=\frac{೪೪ಯ-೧೧ಕ್ಷ}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ-ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$=\frac{೧೧(೪ಯ-ಕ್ಷ)}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ-ಕ್ಷ)(೪ಯ-ಕ್ಷ)}$$

$$=\frac{೧೧}{(ಯ+೩ಕ್ಷ)(೨ಯ+ಕ್ಷ)}$$

ಉ. ೪.

$$\frac{೧೧ಕ}{೬ಕ^{೨}+೧೯ಕನ+೧೦ನ^{೨}}-\frac{೨ನ}{೧೨ಕ^{೨}-೧೧ಕನ+೨ನ^{೨}}$$

$$+\frac{೫ನ}{೮ಕ^{೨}-೨೨ಕನ+೫ನ^{೨}}$$

$$=\frac{೧೧ಕ}{(೨ಕ-೫ನ)(೩ಕ-೨ನ)}-\frac{೨ನ}{(೩ಕ-೨ನ)(೪ಕ-ನ)}$$

$$+\frac{೫ನ}{(೨ಕ-೫ನ)(೪ಕ-ನ)}$$

$$=\frac{೧೧ಕ(೪ಕ-ನ)-೨ನ(೨ಕ-೫ನ)+೫ನ(೩ಕ-೨ನ)}{(೨ಕ-೫ನ)(೩ಕ-೨ನ)(೪ಕ-ನ)}$$

$$= \frac{\text{೪೪ಕ}^{\text{೨}} - \text{೧೧ಕನ} - \text{೪ಕನ} + \text{೧೦ನ}^{\text{೨}} + \text{೧೫ಕನ} - \text{೧೦ನ}^{\text{೨}}}{(\text{೨ಕ} - \text{೫ನ})(\text{೩ಕ} - \text{೨ನ})(\text{೪ಕ} - \text{ನ})}$$

$$= \frac{\text{೪೪ಕ}^{\text{೨}}}{(\text{೨ಕ} - \text{೫ನ})(\text{೩ಕ} - \text{೨ನ})(\text{೪ಕ} - \text{ನ})}.$$

ಉ. ೫.
$$\frac{\text{೧}}{\text{೨ಯ} - \text{೩ರ}} - \frac{\text{೪ಯ}^{\text{೨}} - \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}}}{\text{೮ಯ}^{\text{೩}} - \text{೨೭ರ}^{\text{೩}}}$$

$$= \frac{\text{೧}}{\text{೨ಯ} - \text{೩ರ}} - \frac{\text{೪ಯ}^{\text{೨}} - \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}}}{(\text{೨ಯ} - \text{೩ರ})(\text{೪ಯ}^{\text{೨}} + \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}})}$$

$$= \frac{(\text{೪ಯ}^{\text{೨}} + \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}}) - (\text{೪ಯ}^{\text{೨}} - \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}})}{(\text{೨ಯ} - \text{೩ರ})(\text{೪ಯ}^{\text{೨}} + \text{೬ಯರ} + \text{೯ರ}^{\text{೨}})}$$

$$= \frac{\text{೧೨ಯರ}}{\text{೮ಯ}^{\text{೩}} - \text{೨೭ರ}^{\text{೩}}}.$$

ಉ. ೬.
$$\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}} - \text{೫ಯ} - \text{೩೬}}{\text{ಯ}^{\text{೨}} + \text{ಯ} - \text{೧೨}} - \frac{\text{ಯ}^{\text{೨}} + \text{೧೨ಯ} + \text{೩೫}}{\text{ಯ}^{\text{೨}} + \text{೩ಯ} - \text{೧೦}}$$

$$= \frac{(\text{ಯ} + \text{೪})(\text{ಯ} - \text{೯})}{(\text{ಯ} + \text{೪})(\text{ಯ} - \text{೩})} - \frac{(\text{ಯ} + \text{೭})(\text{ಯ} + \text{೫})}{(\text{ಯ} + \text{೫})(\text{ಯ} - \text{೨})}$$

$$= \frac{\text{ಯ} - \text{೯}}{\text{ಯ} + \text{೩}} - \frac{\text{ಯ} + \text{೭}}{(\text{ಯ} - \text{೨})}$$

$$\frac{(\text{ಯ} - \text{೯})(\text{ಯ} - \text{೨}) - (\text{ಯ} + \text{೭})(\text{ಯ} - \text{೩})}{(\text{ಯ} - \text{೩})(\text{ಯ} - \text{೨})}$$

$$= \frac{(\text{ಯ}^{\text{೨}} - \text{೧೧ಯ} + \text{೧೮}) - (\text{ಯ}^{\text{೨}} + \text{೪ಯ} - \text{೨೧})}{(\text{ಯ} - \text{೩})(\text{ಯ} - \text{೨})} = \frac{\text{೧೫ಯ} + \text{೩೯}}{(\text{ಯ} \;\; \text{೩})(\text{ಯ} \cdot \text{೨})}$$

$$= \frac{\text{೩}(\text{೧೩} - \text{೫ಯ})}{(\text{ಯ} - \text{೩})(\text{ಯ} - \text{೨})}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಪತ್ರಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾದಾ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

ಉ. ೭. $\frac{೨ಅ^೨ + ೩ಅಕ + ಕ^೨}{೮ಅ^೩ + ಕ^೩} + \frac{೨ಅ^೨ - ೩ಅಕ + ಕ^೨}{೮ಅ^೩ - ಕ^೩} - \frac{೨ಅ^೩}{೧೬ಅ^೪ + ೪ಅ^೨ಕ^೨ + ಕ^೪}$

$$= \frac{(ಅ + ಕ)(೨ಅ + ಕ)}{(೨ಅ + ಕ)(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨)} + \frac{(ಅ - ಕ)(೨ಅ - ಕ)}{(೨ಅ - ಕ)(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨)} - \frac{೨ಅ^೩}{(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨)(ಅ^೪ + ೨ಅಕ + ಕ^೨)}$$

$$= \frac{ಅ + ಕ}{೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨} + \frac{ಅ - ಕ}{೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨} - \frac{೨ಅ^೩}{(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨)(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨)}$$

$$= \frac{(ಅ + ಕ)(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨) + (ಅ - ಕ)(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨) - ೨ಅ^೩}{(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨)(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨)}$$

ಅಂಶ $= ಅ(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨) + ಅ(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨)$

$+ ಕ(೪ಅ^೨ + ೨ಅಕ + ಕ^೨) - ಕ(೪ಅ^೨ - ೨ಅಕ + ಕ^೨) - ೨ಅ^೩$

$= ಅ(೮ಅ^೨ + ೨ಕ^೨) + ೪ಅಕ^೨ - ೨ಅ^೩$

$= ೬ಅ^೩ + ೬ಅಕ^೨ \quad ೬ಅ(ಅ^೨ + ಕ^೨)$

$\therefore$ ರಾಶಿಯು $= \frac{೬ಅ(ಅ^೨ + ಕ^೨)}{೧೬ಅ^೪ + ೪ಅ^೨ಕ^೨ + ಕ^೪}$.

ಉ. ೮. $ಅ - ಇ + \frac{ಇ^೩}{ಅ^೨ - ಅಇ + ಇ^೨}$

$$\frac{(ಅ - ಇ)(ಅ^೨ + ಅಇ + ಇ^೨) + ಇ^೩}{ಅ^೨ + ಅಇ + ಇ^೨}$$

$$\frac{ಅ^೩ - ಇ^೩ + ಇ^೩}{ಅ^೨ + ಅಇ + ಇ^೨} = \frac{ಅ^೩}{ಅ^೨ + ಅಇ + ಇ^೨}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣ-ವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. $\frac{೪}{ಬ-ಮ}-\frac{೪}{ಬ+ಮ}$.

೨. $\frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ}-\frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}$.

೩. $\frac{ಅಕ}{ಕ-ಗ}-\frac{ಅಗ}{ಕ-ಗ}$.

೪. $\frac{ಅ}{ಕ}+\frac{ಕ}{ಅ}-೨$.

೫. $\frac{ಅ^೨}{ಕ^೨}+\frac{ಕ^೨}{ಅ^೨}+೧$.

೬. $\frac{ಅ}{ಪ+ಮ}+\frac{ಅಮ}{ಪ^೨-ಮ^೨}$.

೭. $\frac{ಕ}{ಪ^೨-೨ಪಮ+ಮ^೨}-\frac{ಕ}{ಪ^೨-ಮ^೨}$.

೮. $\frac{(ದ+ನ)^೨}{ದ^೩-ನ^೩}-\frac{ದ-ನ}{ದ^೨+ದನ+ನ^೨}$.

೯. $\frac{೧}{ಯ-೫}-\frac{೫ಯ}{ಯ^೩-೧೨೫}$.

೧೦. $\frac{ಪ+ಮ}{ಪ^೨+ಪಮ+ಮ^೨}+\frac{ಪ-ಮ}{ಪ^೨-ಪಮ+ಮ^೨}$.

೧೧. $\frac{ಅ^೨+೩ಅ-೪೦}{ಅ^೨+೬ಅ+೧೫}+\frac{ಅ^೨+೫ಅ-೧೪}{ಅ^೨+೪ಅ-೨೧}$.

೧೨. $\frac{ಅ+೨}{ಅ^೨+೮ಅ+೧೫}+\frac{ಅ+೧}{ಅ^೨+೭ಅ+೧೨}$.

೧೩. $\frac{೩ಯ+೪}{೨೭ಯ^೩+೬೪}+\frac{೩ಯ-೪}{೨೭ಯ^೩-೬೪}$.

೧೪. $\frac{ರ^೩-ರ^೨ಲ+ರಲ^೨}{ರ^೩+ಲ^೩}+\frac{ಲ^೩+ರಲ^೨+ರ^೨ಲ}{ರ^೩-ಲ^೩}$.

೧೫. $\frac{೧}{೨ಪ+೫ಮ}-\frac{೭ಪ-೫ಮ}{೪ಪ^೨+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^೨}$.

೧೬. $$\frac{ನ^2+೨ನ+೧}{ನ^3+೪ನ^2+ನ-೬}-\frac{ನ^2-೨ನ+೧}{ನ^3+೬ನ^2+೧೧ನ+೬}$$

೧೭. $$\frac{೧}{ಪ^3-ಮ^3}-\frac{ಪ-ಮ}{ಪ^4+ಪ^2ಮ^2+ಮ^4}.$$

೧೮. $$\frac{ಅ}{ಅ^2+೧೦ಅ+೨೫}-\frac{ಅ^2}{ಅ^3+೧೫ಅ^2+೭೫ಅ+೧೨೫}.$$

೧೯. $$\frac{೧}{ಪ-೨ಮ+೩}-\frac{ಪ^2+೪ಮ^2+೯}{ಪ^3-೮ಮ^3+೧೮ಪಮ+೨೭}.$$

೨೦. $$\frac{ಪ}{ಪ-೪}+\frac{ಪ}{ಪ+೪}-\frac{ಪ^2}{ಪ^2-೧೬}.$$

೨೧. $$\frac{೧}{ನ+೩}-\frac{ನ-೩}{ನ^2+೬ನ+೯}-\frac{೬(ನ-೩)}{(ನ+೩)^3}.$$

೨೨. $$\frac{ಪ}{ಪ^3-ಮ^3}+\frac{ಮ}{ಪ^2+ಮ^2}-\frac{ಪ^2+ಮ^2}{ಪ^4+\;{}^2ಮ^2+ಮ^4}$$

೨೩. $$\frac{೩}{೫ಅ+೨}-\frac{೧}{೨ಅ-೫}+\frac{೪ಅ+೧೧}{೧೦ಅ^2-೨೧ಅ+೧೦}.$$

೨೪. $$\frac{೧}{ಯ+೩}-\frac{ಯ+೨}{ಯ^2-೩ಯ+೯}+\frac{೧೦ಯ+೩}{ಯ^3+೨೭}$$

೨೫. $$\frac{೧}{೪ಪ^2-೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^2}+\frac{೧}{೪ಪ^2+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^2}-\frac{೪ಪ^2+೨೫ಮ^2}{೧೬ಪ^4-೨೦೦ಪ^2ಮ^2+೬೨೫ಮ^4}.$$

೨೬. $$\frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}+\frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಪ-ಮ)}+\frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}.$$

೨೭. $$\frac{ಪ-ಬ}{(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)}+\frac{ಬ-ಮ}{(ಮ+ಪ)(ಪ+ಬ)}$$

$$+\frac{ಮ-ಪ}{(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)}.$$

೧೯. $$\frac{ಘ}{(ಗ-ಘ)(ಘ-ಕ)}+\frac{ಕ}{(ಘ-ಕ)(ಕ-ಗ)}+\frac{ಗ}{(ಕ-ಗ)(ಗ-ಘ)}.$$

ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ.

೬೯. ಅನೇಕ ಸಲ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡದೆ, ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಎರಡೇ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಕೂಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಣಾಮಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಪದವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವದು, ಹೀಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ಹೋಗುವದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದವು** ದೊಡ್ಡದು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆದ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಆಗುವ ಸಂಭವವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ತರಹದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $$\frac{೧}{ಅ-೨}-\frac{೧}{ಅ+೨}-\frac{೪}{ಅ^{೨}+೪}$$

$$=\frac{(ಅ+೨)-(ಅ-೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)}-\frac{೪}{ಅ^{೨}+೪}=\frac{೪}{ಅ^{೨}-೪}-\frac{೪}{ಅ^{೨}+೪}$$

$$=\frac{೪(ಅ^{೨}+೪)-೪(ಅ^{೨}-೪)}{(ಅ^{೨}-೪)(ಅ^{೨}+೪)}=\frac{೩೨}{ಅ^{೪}-೧೬}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದರೆ **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದವು** $(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ^{೨}+೪)$ ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಂಡಿಸಬಹುದು.

ರಾಶಿಯು $$=\frac{(ಅ+೨)(ಅ^{೨}+೪)-(ಅ-೨)(ಅ^{೨}-೪)-೪(ಅ-೨)(ಅ+೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ^{೨}-೪)}.$$

$$=\frac{(ಅ^{3}-೨ಅ^{2}+೪ಅ+೮)-(ಅ^{3}-೨ಅ^{2}+೪ಅ-೮)-೪(ಅ^{2}-೪)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ^{2}+೪)}$$

$$=\frac{(ಅ^{3}+೨ಅ^{2}+೪ಅ+೮-ಅ^{3}+೨ಅ^{2}-೪ಅ+೮-೪ಅ^{2}+೧೬}{(ಅ^{2}-೪)(ಅ^{2}+೪)}$$

$=\frac{೩೨}{ಅ^{೪}-೧೬}$ ಹೀಗೆ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ತುಲನೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ ಮೊದಲನೇ ಮಾರ್ಗವು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡು ಬರುವದು.

ಉ. ೨. $\frac{ಅ-೩}{ಅ-೪}-\frac{ಅ+೮}{ಅ+೭}-\frac{೧೧}{ಅ^{2}+೧೨ಅ+೩೫}$

$$=\frac{(ಅ-೩)(ಅ+೭)-(ಅ-೪)(ಅ+೮)}{(ಅ-೪)(ಅ+೭)}-\frac{೧೧}{(ಅ+೫)(ಅ+೭)}$$

$$=\frac{(ಅ^{2}+೪ಅ-೨೧)-(ಅ^{2}-೪ಅ-೩೨)}{(ಅ-೪)(ಅ+೭)}-\frac{೧೧}{(ಅ+೫)(ಅ+೭)}$$

$$=\frac{೧೧}{(ಅ-೪)(ಅ+೭)}-\frac{೧೧}{(ಅ+೫)(ಅ+೭)}$$

$$=\frac{೧೧(ಅ+೫)-೧೧(ಅ-೪)}{(ಅ-೪)(ಅ+೫)(ಅ+೭)}$$

$$=\frac{೯೯}{(ಅ-೪(ಅ+೫)(ಅ+೭)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಹದ ಸಾಮ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಳೆದಿದೆ.

ಹಲವು ಸಾರೆ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೇ ಪದದವರೆಗೆ ಹೋಗುವದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೩. $\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨}{ಯ^{೨}+೧}+\frac{೪}{ಯ^{೪}+೧}+\frac{೮}{ಯ^{೮}-೧}$

$=\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨}{ಯ^{೨}+೧}+\frac{೪(ಯ^{೪}-೧)+೮}{(ಯ^{೪}+೧)(ಯ^{೪}-೧)}$

$=\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨}{ಯ^{೨}+೧}+\frac{೪(ಯ^{೪}+೧)}{(ಯ^{೪}+೧)(ಯ^{೪}-೧)}$

$\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨}{ಯ^{೨}+೧}+\frac{೪}{ಯ^{೪}-೧}$

$\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨(ಯ^{೨}-೧)+೪}{(ಯ^{೨}+೧)(ಯ^{೨}-೧)}$

$\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨(ಯ^{೨}+೧)}{(ಯ^{೨}-೧)(ಯ^{೨}+೧)}$

$=\frac{೧}{ಯ+೧}+\frac{೨}{ಯ^{೨}-೧}$

$=\frac{ಯ-೧+೨}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)}$

$=\frac{ಯ+೧}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)}$

$=\frac{೧}{ಯ-೧}.$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೫

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{೧}{ಪ-೪}+\frac{೧}{ಪ+೪}+\frac{೨ಪ}{ಪ^{೨}+೧೬}.$

೨. $\frac{೮}{ಪ-೩}-\frac{೫}{ಪ+೩}-\frac{೬೫}{ಪ^{೨}+೯}.$

೩. $\frac{೧}{೨ಮ-೧}-\frac{೧}{೨ಮ+೧}-\frac{೨}{೪ಮ^{೨}+೧}.$

೪. $\frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ}+\frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}-\frac{೨(ಅ^{೨}-ಕ^{೨})}{ಅ^{೨}+ಕ^{೨}}$.

೫. $೧-\frac{೧}{ಪ-೩}+\frac{೬}{ಪ^{೨}-೯}$.

೬. $\frac{೧}{ನ}-\frac{ನ}{ನ-೧}+\frac{ನ^{೨}-೨}{ನ^{೨}-೩ನ+೨}$

೭. $\frac{೨ಮ}{ಮ^{೨}-೪ಮ+೪}-\frac{೧}{೬ಮ-೨}-\frac{೩ಮ}{೪ಮ^{೨}-೧೦ಮ+೪}$

೮. $\frac{೧}{ಪ+ಮ}-\frac{ಪ+ಮ}{ಪ^{೨}-ಪಮ+ಮ^{೨}}+\frac{೩ಪಮ}{ಪ^{೩}-ಮ^{೩}}$.

೯. $\frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ}-\frac{ನ^{೨}-ನಮ+ಮ^{೨}}{ನ^{೨}+ನಮ+ಮ^{೨}}-\frac{೨ನ(೨ನ^{೨}+ಮ^{೨})}{ನ^{೩}+ಮ^{೩}}$.

೧೦. $\frac{೭}{ಯ+೫}+\frac{೧೨-೩ಯ}{ಯ^{೨}-೨೫}+\frac{೫}{ಯ^{೨}+೧}$

೧೧. $\frac{೧}{ಅ+೧}-\frac{೧}{ಅ+೨}-\frac{}{ಅ^{೨}+೪ಅ+}$

೧೨. $\frac{೧}{೨ಪ+೧}-\frac{೧}{೨ಪ+೩}-\frac{೨}{೪ಪ^{೨}+೧೨ಪ+೫}$.

೧೩. $\frac{ಕ್ಷ+೧}{ಕ್ಷ^{೨}+ಕ್ಷ+೧}-\frac{ಕ್ಷ-೧}{ಕ್ಷ^{೨}-ಕ್ಷ+೧}+\frac{೨(ಕ್ಷ^{೨}+೧)}{ಕ್ಷ^{೪}-೧}$.

೧೪. $\frac{೧}{೨ಯ-೧}-\frac{೧}{೨ಯ+೧}+\frac{೨}{೪ಯ^{೨}+೧}+\frac{೪}{೧೬ಯ^{೨}+೧}$

೧೫. $\frac{೧}{ಅ+೧}-\frac{೧}{ಅ+೩}-\frac{೨}{ಅ^{೨}+೬ಅ+೫}-\frac{೪}{ಅ^{೪}+೧೧ಅ^{೨}+೩೧ಅ+೨೧}$

೬.

ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು

೫.೧೦. ಕೆಲವು ಸಾರೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡಿ ಆಮೇಲೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುವದು ಇಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧. $\frac{೩}{ಅ-೫}+\frac{೫}{ಅ+೩}-\frac{೩ಅ}{ಅ^2-೨೫}-\frac{೫ಅ}{ಅ^2-೯}$

$$=\left(\frac{೩}{ಅ-೫}-\frac{೩ಅ}{ಅ^2-೨೫}\right)+\left(\frac{೫}{ಅ+೩}-\frac{೫ಅ}{ಅ^2-೯}\right)$$

$$=\frac{೩(ಅ+೫)-೩ಅ}{ಅ^2-೨೫}+\frac{೫(ಅ-೩)-೫ಅ}{ಅ^2-೯}$$

$$=\frac{೧೫}{ಅ^2-೨೫}-\frac{೧೫}{ಅ^2-೯}$$

$$=\frac{೧೫ಅ^2-೧೩೫-೧೫ಅ^2+೩೭೫}{(ಅ^2-೨೫)(ಅ^2-೯)}$$

$$=\frac{೨೪೦}{ಅ^4-೩೪ಅ^2+೨೨೫}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ಅ−೫ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ಅ+೩ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಹಾಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ, ಆ ನಂತರ ಈ ಸಂಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದೆ. ನಾಲ್ಕೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಛೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ಅ. ಯನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡುವದಕ್ಕೆ ಯತ್ನಿಸುವದಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{\text{೧}}{\text{ಯ}-\text{೩}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೪ಯ}+\text{೩}}-\frac{\text{೬}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೯}}$.

೨. $\frac{\text{೪}}{\text{೧}+\text{ಅ}}-\frac{\text{೧}}{\text{೪}+\text{ಅ}}+\frac{\text{೪}}{\text{೧}-\text{ಅ}}-\frac{\text{೧}}{\text{೪}-\text{ಅ}}$.

೩. $\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}-\text{೨}}-\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}-\text{೧}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{೧}}-\frac{\text{೨}}{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{೪}}$.

೪. $\frac{\text{೫ನ}}{\text{ನ}^{\text{೨}}-\text{೩೬}}+\frac{\text{೬ನ}}{\text{ನ}^{\text{೨}}-\text{೨೫}}-\frac{\text{೫}}{\text{ನ}+\text{೬}}-\frac{\text{೬}}{\text{ನ}-\text{೫}}$.

೫. $\frac{\text{ಅ}+\text{ಕ}}{\text{ಅ}-\text{ಕ}}-\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ}^{\text{೨}}+\text{ಕ}^{\text{೨}}}-\frac{\text{ಅ}-\text{ಕ}}{\text{ಅ}+\text{ಕ}}$.

೬. $\frac{\text{೨}}{\text{ಕ್ಷ}+\text{೧}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಕ್ಷ}-\text{೨}}-\frac{\text{೨}}{\text{ಕ್ಷ}-\text{೧}}-\frac{\text{೧}}{\text{ಕ್ಷ}+\text{೨}}$.

೭. $\frac{\text{೧}}{\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}-\text{೩ಕ್ಷ}+\text{೨}}-\frac{\text{೨}}{\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}-\text{೪}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}+\text{ಕ್ಷ}-\text{೨}}$.

೮. $\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}+\frac{\text{೧}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}$.

೯. $\frac{\text{ಗ}}{\text{ಅ}-\text{ಕ}}-\frac{\text{ಕ}}{\text{ಅ}-\text{ಗ}}-\frac{\text{ಗ}}{\text{ಅ}+\text{ಕ}}+\frac{\text{ಕ}}{\text{ಅ}+\text{ಗ}}$.

೧೦. $\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}-\text{೨}}+\frac{\text{೩}}{\text{ಯ}+\text{೩}}-\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}+\text{೪}}-\frac{\text{೩}}{\text{ಯ}-\text{೧}}$.

೧೧. $\frac{\text{೨}}{\text{ಕ್ಷ}-\text{೨}}+\frac{\text{೪}}{\text{ಕ್ಷ}+\text{೩}}-\frac{\text{ಕ್ಷ}+\text{೧೦}}{\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}-\text{೨ಕ್ಷ}-\text{೮}}-\frac{\text{೮}}{\text{ಕ್ಷ}^{\text{೨}}+\text{೮ಕ್ಷ}+\text{೧೫}}$.

೧೨. $\frac{\text{೨ಅ}}{\text{ಅ}^{\text{೨}}-\text{೨೫ಕ}^{\text{೨}}}-\frac{\text{೫ಕ}}{\text{ಅ}^{\text{೨}}+\text{೫ಅಕ}+\text{೨೫ಕ}^{\text{೨}}}-\frac{\text{೧}}{\text{೧}+\text{೫ಕ}}$

$$+\frac{ಅ(ಅ+೧೨ಕ)}{ಅ^{೨}-೧೨೫ಕ^{೨}}.$$

೭.

ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವದು.

೫.೧೧. ಅನೇಕ ಸಾರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಛೇದಗಳೊಳಗಿನ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು ಅನುಕೂಲ-ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಅವಶ್ಯವು ಸಹ ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$\frac{೧೧}{ಅ-ಕ}+\frac{೭}{ಕ-ಅ}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{೧೧}{ಅ-ಕ}+\frac{೭}{ಕ-ಅ}=\frac{೧೧}{ಅ-ಕ}+\frac{೭}{-(-ಕ+ಅ)}=\frac{೧೧}{ಅ-ಕ}-\frac{೭}{ಅ-ಕ}$$

$=\frac{೪}{ಅ-ಕ}$ ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಕ−ಅ ಅಂದರೆಯೇ −(ಅ−ಕ), ಆದುದರಿಂದ $\frac{೭}{ಕ-ಅ}$ ಅಂದರೆಯೇ $-\frac{೭}{ಅ-ಕ}$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಕೂಡಲೇ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಬರದಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು $\frac{೧೧}{ಅ-ಕ}+\frac{೭}{ಕ-ಅ}$

$$=\frac{೧೧(ಕ-ಅ)+೭(ಅ-ಕ)}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)}=\frac{೧೧ಕ-೧೧ಅ+೭ಅ-೭ಕ}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)}$$

$$=\frac{೪ಕ-೪ಅ}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)}=\frac{೪(ಕ-ಅ)}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)}=\frac{೪}{ಅ-ಕ}$$

ಎಂದು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಎಲ್ಲ ಶ್ರಮವು ದ್ರಾವಿಡ ಪ್ರಾಣಾಯಾಮ-ದಂತೆ ನಗೆಗೀಡಾದದ್ದಲ್ಲವೇ? ಇಲ್ಲಿ **೮. ಸಮಚ್ಛೇದ** (ಅ−ಕ) (ಕ−ಅ)

ಇರದೇ ಅದು ೮ — ಕ ಇದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೂಡಲೇ ಬರಬೇಕು.

ಅದರಂತೆಯೇ $\frac{\text{೨ಕ}}{\text{ಪ — ೨ಬ}} - \frac{\text{೩ಕ}}{\text{೪ಬ — ೨ಪ}}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{\text{೨ಕ}}{\text{ಪ — ೨ಬ}} - \frac{\text{೩ಕ}}{\text{೪ಬ — ೨ಪ}} = \frac{\text{೨ಕ}}{\text{ಪ — ೨ಬ}} - \frac{\text{೩ಕ}}{-(-\text{೪ಬ} + \text{೨ಪ})} =$$

$$= \frac{\text{೨ಕ}}{\text{ಪ — ೨ಬ}} + \frac{\text{೩ಕ}}{\text{೨}(\text{ಪ — ೨ಬ})} = \frac{\text{೪ಕ} + \text{೩ಕ}}{\text{೨}(\text{ಪ — ೨ಬ})} = \frac{\text{೭ಕ}}{\text{೨}(\text{ಪ — ೨ಬ})}$$

ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೪ಬ — ೨ಪ, ಅಂ. — ೨ಪ + ೪ಬ, ಅಂದರೆಯೇ — ೨(ಪ — ೨ಬ) ಈ ಸಂಗತಿಯು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಕಾರಣವಿಲ್ಲದೆ ಕೃತಿಯು ಬೆಳೆಯುವದು.

§ ೧೨. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ನಮಗೆ ಆಗಾಗ್ಗೆ ತಿಳಿದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

$$\text{ಬ} - \text{ಪ} = -(\text{ಪ} - \text{ಬ});\ (-\text{ಪ})(-\text{ಬ}) = (\text{ಪ})(\text{ಬ});$$

$$(-\text{ಪ})(\text{ಬ}) = (\text{ಪ})(-\text{ಬ});\ -\frac{-\text{ಪ}}{\text{ಬ}} = \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}};\ -\frac{\text{ಪ}}{-\text{ಬ}} = \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}};$$

$$\frac{-\text{ಪ}}{\text{ಬ}} = \frac{\text{ಪ}}{-\text{ಬ}} = \frac{-\text{ಪ}}{\text{ಬ}}\ \ \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}};\ \frac{\text{ಪ}}{-\text{ಬ}} = -\frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}};\ \frac{-\text{ಪ}}{-\text{ಬ}} = \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}}.$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಈ ಎರಡರೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಅಂಶ ಅಥವಾ ಛೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ, ಮತ್ತು ಕಂಸಿನ ಹೊರಗಿನ ಚಿನ್ಹವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಸಿನೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಆ ಕಂಸದಲ್ಲಿರುವ ಗುಂಪಿನ ಬಾಹ್ಯ ರೂಪವು ಬದಲಾದರೂ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಅದೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ

ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತರಹದಾದರೂ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ:

ಉ.೧. $\frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}+\frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}+\frac{\text{೨ಪಮ}}{\text{ಮ}^{\text{೨}}-\text{ಪ}^{\text{೨}}}$

$$=\frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}+\frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}-\frac{\text{೨ಪಮ}}{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{ಮ}^{\text{೨}}}$$

$$=\frac{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಮ})+\text{ಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})-\text{೨ಪಮ}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}$$

$$=\frac{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{ಪಮ}+\text{ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}}-\text{೨ಪಮ}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}$$

$$=\frac{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{೨ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}+\text{ಮ})}$$

$$=\frac{(\text{ಪ}-\text{ಮ})^{\text{೨}}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}+\text{ಮ})}$$

$$\frac{\text{ಪ}-\text{ಮ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}.$$

ಉ.೨. $\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ಯರ}+\text{ರ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ರ}^{\text{೩}}}+\frac{\text{೨ಯ}}{\text{ರ}^{\text{೨}}-\text{ಯ}^{\text{೨}}}-\frac{\text{೧}}{\text{ರ}-\text{ಯ}}$

$$\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ಯರ}+\text{ರ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ರ}^{\text{೩}}}+\frac{\text{೨ಯ}-(\text{ರ}+\text{ಯ})}{\text{ರ}^{\text{೨}}-\text{ಯ}^{\text{೨}}}$$

$$\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ಯರ}+\text{ರ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ರ}^{\text{೩}}}+\frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ರ}^{\text{೨}}-\text{ಯ}^{\text{೨}}}$$

$$\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ಯರ}+\text{ರ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ರ}^{\text{೩}}}-\frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ರ}^{\text{೨}}}$$

$$\frac{ಯ^೨ - ಯರ + ರ^೨}{ಯ^೩ - ರ^೩} - \frac{೧}{ಯ + ರ}$$

$$\frac{(ಯ + ರ)(ಯ^೨ - ಯರ + ರ^೨) - (ಯ^೩ + ರ^೩)}{(ಯ + ರ)(ಯ^೩ - ರ^೩)}$$

$$\frac{ಯ^೩ + ರ^೩ - (ಯ^೩ - ರ^೩)}{(ಯ + ರ)(ಯ^೩ - ರ^೩)}$$

$$= \frac{}{(ಯ + ರ)(ಯ^೩ - ರ^೩)}.$$

ಉ. ೩. $$\frac{ಕ}{೨ಕ^೨ - ೯ಕನ - ೫ನ^೨} - \frac{೩ಕ}{೬ಕ^೨ + ೧೧ಕನ + ೪ನ^೨} - \frac{ನ}{೨೦ನ^೨ + ೧೧ನಕ - ೩ಕ^೨}$$

$$= \frac{ಕ}{೨ಕ^೨ - ೯ಕನ - ೫ನ^೨} - \frac{೩ಕ}{೬ಕ^೨ + ೧೧ಕನ - ೪ನ^೨} + \frac{ನ}{೩ಕ^೨ - ೧೧ಕನ - ೨೦ನ^೨}$$

$$= \frac{ಕ}{(ಕ - ೫ನ)(೨ಕ + ನ)} - \frac{೩ಕ}{(೨ಕ + ನ)(೩ಕ + ೪ನ)} + \frac{ನ}{(೩ಕ + ೪ನ)(ಕ - ೫ನ)}$$

$$= \frac{ಕ(೩ಕ + ೪ನ) - ೩ಕ(ಕ - ೫ನ) + ನ(೨ಕ + ನ)}{(ಕ - ೫ನ)(೨ಕ + ನ)(೩ಕ + ೪ನ)}$$

$$= \frac{೩ಕ^೨ + ೪ಕನ - ೩ಕ^೨ + ೧೪ಕನ + ೨ಕನ + ನ^೨}{(ಕ - ೫ನ)(೨ಕ + ನ)(೩ಕ + ೪ನ)}$$

$$= \frac{೨೧ಕನ + ನ^೨}{(ಕ - ೫ನ)(೨ಕ + ನ)(೩ಕ + ೪ನ)}$$

$$= \frac{ನ(೨೧ಕ + ನ)}{(ಕ - ೫ನ)(೨ಕ + ನ)(೩ಕ + ೪ನ)}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೊದಲೇ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಛೇದಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ,

$$\frac{ಕ}{(ಕ-೫ನ)(೨ಕ+ನ)} - \frac{೩ಕ}{(೨ಕ+ನ)(೩ಕ+೪ನ)} - \frac{ನ}{(೪ನ+೩ಕ)(೫ನ-ಕ)}$$

ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ತರುವಾಯ ೫ನ — ಕ ಅಂದರೆಯೇ — (ಕ—೫ನ) ಮತ್ತು ೪ನ+೩ಕ ಅಂದರೆಯೇ ವಿರುದ್ಧ ಪದಕ್ರಮದಿಂದ ೩ಕ+೪ನ, ಮತ್ತು ಆದುದರಿಂದ

$$-\frac{ನ}{(೪ನ+೩ಕ)(೫ನ-ಕ)} = +\frac{ನ}{(೩ಕ+೪ನ)(ಕ-೫ನ)}$$

ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅದರಂತೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉ. ೪. $$\frac{ಪಬ}{(ಪ-ಮ)(ಬ-ಮ)} + \frac{ಬಮ}{(ಬ-ಪ)(ಮ-ಪ)} + \frac{ಮಪ}{(ಮ-ಬ)(ಪ-ಬ)}$$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೇಲೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿ ಆರು ಗುಣಗಳಿದ್ದಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಕಂಡು-ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗುಣಗಳು ಮಾತ್ರವಿದ್ದು ಅವೇ ತಿರುಗಿ ಚಿಹ್ನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬಂದಿವೆ. ಪ — ಮ = — (ಮ — ಪ), ಬ — ಪ = — (ಪ — ಬ) ಮತ್ತು ಮ — ಬ = — (ಬ — ಮ) ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು =

$$\frac{ಪಬ}{(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)} - \frac{ಬಮ}{(ಮ-ಪ)(ಪ-ಬ)} - \frac{ಮಪ}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}$$

$$= -\frac{ಪಬ(ಪ-ಬ)+ಬಮ(ಬ-ಮ)+ಮಪ(ಮ-ಪ)}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶ $= ಪ^{೨}ಬ - ಪಬ^{೨} + ಬಮ(ಬ - ಮ) + ಪಮ^{೨} - ಪ^{೨}ಮ$

$= ಪ^{೨}ಬ - ಪ^{೨}ಮ - ಪಬ^{೨} + ಪಮ^{೨} + ಬಮ(ಬ - ಮ)$

$= ಪ^{೨}(ಬ - ಮ) - ಪ(ಬ^{೨} - ಮ^{೨}) + ಬಮ(ಬ - ಮ)$

$= (ಬ - ಮ)\{ಪ^{೨} - ಪ(ಬ + ಮ) + ಬಮ\}$

$= (ಬ - ಮ)\{(ಪ^{೨} - ಪಬ) - (ಪಮ - ಬಮ)\}$

$= (ಬ - ಮ)\{ಪ(ಪ - ಬ) - ಮ(ಪ - ಬ)\}$

$= (ಬ - ಮ)(ಪ - ಬ)(ಪ - ಮ)$

$= -(ಪ - ಬ)(ಬ - ಮ)(ಮ - ಪ)$

$$\therefore \text{ರಾಶಿಯು} = -\frac{-(ಪ - ಬ)(ಬ - ಮ)(ಮ - ಪ)}{(ಪ - ಬ)(ಬ - ಮ)(ಮ - ಪ)} = ೧.$$

ಇಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಯಾವಾಗ ಛೇದಗಳು ಮೇಲಿನಂತೆ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರುವವೋ ಆಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಂತೆ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ವಿವಕ್ಷಿತ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಣಾನುಕ್ರಮದಂತೆ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೊನೆಯ ವರ್ಣದ ನಂತರ ತಿರುಗಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಬರೆಯುವದು ರಾಜಮಾರ್ಗವು. ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಯಾವ ತರದ ತಪ್ಪಾಗುವ ಸಂಭವವಿಲ್ಲ. ಬರೆಯುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ (**ಪ—ಬ, ಬ—ಮ, ಮ—ಪ) ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ**ವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೇ ಹೇಳಿದೆ. ಛೇದಗಳಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದ ತಿರುಗಿ ಬರೆದ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ನೋಡಲು ಆರು ಗುಣಗಳು ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದವೋ ಅಲ್ಲಿ ನಿಜವಾಗಿ ಮೂರೇ ಗುಣಗಳಿದ್ದದ್ದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡೇ ಬಂದಿರುವದು.

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಳ್ಳೇ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಛೇದಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ಬರೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆಂದಲ್ಲ, ಆದರೆ ನಮ್ಮ ತರಬೇತಿಯು ಅಷ್ಟು ಆಗುವವರೆಗೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{೭}{ಪ-ಮ}+\frac{೬}{ಮ-ಪ}$.

೨. $\frac{೧}{೫ಯ-೩}-\frac{೧}{೩-೫ಯ}$.

೩. $\frac{ರ+೫}{ರ-೩}-\frac{೫-ರ}{೩-ರ}$.

೪. $\frac{೪ಪ}{ಪ^೨-ಮ^೨}-\frac{೪ಮ}{ಮ^೨-ಪ^೨}$.

೫. $\frac{೪}{ಕ್ಷ^೨-೫ಕ್ಷ+೪}-\frac{೧}{೧-ಕ್ಷ}-\frac{೧}{ಕ್ಷ-೪}$.

೬. $\frac{೩}{ಪ+ಮ}+\frac{೩}{ಮ+ಪ}-\frac{೮ಮ}{ಮ^೨-ಪ^೨}$.

೭. $\frac{೧}{೩ಕ^೨+೭ಕ-೪}-\frac{೧}{೮-೧೦ಕ-೩ಕ^೨}$.

೮. $\frac{೪}{ನ-೨}+\frac{೨}{೪-ನ}+\frac{೮-ನ}{೮-೬ನ+ನ^೨}$.

೯. $\frac{೨+೪ಯ}{೧-೪ಯ}-\frac{೨-೪ಯ}{೧+೪ಯ}+\frac{೧೨ಯ}{೧೬ಯ^೨-೧}$.

೧೦. $\frac{೨}{೨-ಕ್ಷ}-\frac{೧}{ಕ್ಷ+೪}+\frac{೨}{ಕ್ಷ+೨}-\frac{೧}{೪-ಕ್ಷ}$.

೧೧. $\frac{ಬ}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}-\frac{ಮ}{(ಮ-ಬ)(ಮ-ಪ)}$.

೧೨. $\frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)}+\frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)}+\frac{೧}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)}$.

೧೩. $\frac{ಪಬ}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)}+\frac{ಬಮ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)}+\frac{ಮಪ}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)}$.

೧೪. $\frac{ಯ}{(ಯ-ರ)(ಯ-ಲ)}+\frac{ರ}{(ರ-ಲ)(ರ-ಯ)}+\frac{ಲ}{(ಲ-ಯ)(ಲ-ರ)}$.

೧೫. $\frac{ಯ+ರ}{(ಯ-ಲ)(ರ-ಲ)}+\frac{ರ-ಲ}{(ರ-ಯ)(ಲ-ಯ)}-\frac{ಯ+ಲ}{(ಯ-ರ)(ರ-ಲ)}$.

೧೧. $\frac{(ಪ+ಬ)^{೨}-ಪಬ}{(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)}-\frac{(ಬ+ಮ)^{೨}-ಬಮ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)}+\frac{(ಪ+ಮ)^{೨}-ಪಮ}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}$.

೧೨. $\frac{ಅ+ಪ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)}-\frac{ಅ+ಬ}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}+\frac{ಅ+ಮ}{(ಪ-ಮ)(ಬ-ಮ)}$.

೮.

ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ.

§ ೧೩. ಯಾವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಛೇದದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥವುಗಳಿಗೆ **ಪ್ರಭಾಗ-ಜಾತಿ** (ಇಲ್ಲವೆ **ಮಿಶ್ರ** Complex) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$\frac{\frac{೨}{೩}}{೬}$, $\frac{೩}{\frac{೭}{೯}}$, $\frac{\frac{ಕ}{ಖ}}{ಗ}$, $\frac{ಕ}{\frac{ಖ}{ಗ}}$, $\frac{\frac{ಪ+ಬ}{ಮ}}{ನ}$, $\frac{ಯ}{\frac{ಯ-ರ}{ಲ}}$, $\frac{\frac{ಮ^{೨}-ಯ^{೨}}{ಮ^{೨}+ಮಯ+ಯ^{೨}}}{\frac{ಮ^{೨}+೨ಮಯ+ಯ^{೨}}{ಮ^{೩}-ಯ^{೩}}}$ ಇ.

ಇವು ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವವು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆಯೋ ಅದರಂತೆಯೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯು ಒಂದೇ. ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸುಲಭ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{\frac{ಕ}{ಖ}}{ಗ}=\frac{ಕ}{ಖ}\div\frac{ಗ}{೧}=\frac{ಕ}{ಖ}\times\frac{೧}{ಗ}=\frac{ಕ}{ಖಗ}$

ಉ.೨. $\frac{ಕ}{\frac{ಖ}{ಗ}}=\frac{ಕ}{೧}\div\frac{ಖ}{ಗ}=\frac{ಕ}{೧}\times\frac{ಗ}{ಖ}=\frac{ಕಗ}{ಖ}$.

ಉ.೩. $\frac{\frac{ಕ}{ಖ}}{\frac{ಗ}{ಘ}}=\frac{ಕ}{ಖ}\div\frac{ಗ}{ಘ}=\frac{ಕ}{ಖ}\times\frac{ಘ}{ಗ}=\frac{ಕಘ}{ಖಗ}$

ಉ.೪. $$\frac{\frac{\text{ಪ}+\text{ಬ}}{\text{ಮ}}}{\text{ನ}} = \frac{\text{ಪ}+\text{ಬ}}{\text{ಮ}} \div \frac{\text{ನ}}{೧} = \frac{\text{ಪ}+\text{ಬ}}{\text{ಮ}} \times \frac{೧}{\text{ನ}} = \frac{\text{ಪ}+\text{ಬ}}{\text{ನಮ}}.$$

ಉ.೫. $$\frac{\text{ಯ}}{\frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ಲ}}} = \frac{\text{ಯ}}{೧} \div \frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ಲ}} = \frac{\text{ಯ}}{೧} \times \frac{\text{ಲ}}{\text{ಯ}-\text{ರ}} = \frac{\text{ಯಲ}}{\text{ಯ}-\text{ರ}}.$$

ಉ.೬. $$\frac{\frac{\text{ಮ}^೨-\text{ಯ}^೨}{\text{ಮ}^೨+\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨}}{\frac{\text{ಮ}^೨+೨\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨}{\text{ಮ}^೩-\text{ಯ}^೩}} = \frac{\text{ಮ}^೨-\text{ಯ}^೨}{\text{ಮ}^೨+\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨} \div$$

$$\frac{\text{ಮ}^೨+೨\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨}{\text{ಮ}^೩-\text{ಯ}^೩} = \frac{\text{ಮ}^೨-\text{ಯ}^೨}{\text{ಮ}^೨+\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨} \times$$

$$\frac{\text{ಮ}^೩-\text{ಯ}^೩}{\text{ಮ}^೨+೨\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨} = \frac{(\text{ಮ}-\text{ಯ})(\text{ಮ}+\text{ಯ})}{\text{ಮ}^೨+\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨}$$

$$\times \frac{(\text{ಮ}-\text{ಯ})(\text{ಮ}^೨+\text{ಮಯ}+\text{ಯ}^೨)}{(\text{ಮ}+\text{ಯ})^೨} = \frac{(\text{ಮ}-\text{ಯ})^೨}{\text{ಮ}+\text{ಯ}}.$$

ಉ.೭. $$\frac{\frac{\text{ನ}+\text{ಮ}}{\text{ನ}-\text{ಮ}} - \frac{\text{ನ}-\text{ಮ}}{\text{ನ}+\text{ಮ}}}{\frac{\text{ನ}+\text{ಮ}}{\text{ನ}-\text{ಮ}} + \frac{\text{ನ}-\text{ಮ}}{\text{ನ}+\text{ಮ}}} = \frac{\frac{(\text{ನ}+\text{ಮ})^೨-(\text{ನ}-\text{ಮ})^೨}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}{\frac{(\text{ನ}+\text{ಮ})^೨+(\text{ನ}-\text{ಮ})^೨}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}$$

$$= \frac{\frac{(\text{ನ}^೨+೨\text{ನಮ}+\text{ಮ}^೨)-(\text{ನ}^೨-೨\text{ನಮ}+\text{ಮ}^೨)}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}{\frac{(\text{ನ}^೨+೨\text{ನಮ}+\text{ಮ}^೨)+(\text{ನ}^೨-೨\text{ನಮ}+\text{ಮ}^೨)}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}$$

$$= \frac{\frac{೪\text{ನಮ}}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}{\frac{೨(\text{ನ}^೨+\text{ಮ}^೨)}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}}$$

$$= \frac{೪ನಮ}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)} \times \frac{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}{೨(ನ^೨+ಮ^೨)} = \frac{೨ನಮ}{ನ^೨+ಮ^೨}.$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ (ನ − ಮ) (ನ + ಮ) ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಾವು ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$ರಾಶಿಯು = \frac{(ನ+ಮ)^೨-(ನ-ಮ)^೨}{(ನ+ಮ)^೨+(ನ-ಮ)^೨}$$

$$= \frac{(ನ^೨+೨ನಮ+ಮ^೨)-(ನ^೨-೨ನಮ+ಮ^೨)}{(ನ^೨+೨ನಮ+ಮ^೨)+(ನ^೨-೨ಮ+ಮ^೨)}$$

$$= \frac{೪ನಮ}{೨(ನ^೨+ಮ^೨)} = \frac{೨ನಮ}{ನ^೨+ಮ^೨}.$$

ಎಂದು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು **ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬಾಹ್ಯರೂಪವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಅಷ್ಟೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಎಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.**

ಉ. ೮.

$$\frac{ಕ-ಸ+\frac{ಕಸ}{ಕ-ಸ}}{ಕ+ಸ-\frac{ಕಸ}{ಕ+ಸ}} - \frac{ಕ-ಸ+\frac{ಸ^೩}{ಕ^೨+ಕಸ+ಸ^೨}}{ಕ+ಸ-\frac{ಸ^೩}{ಕ^೨-ಕಸ+ಸ^೨}}$$

$$= \frac{(ಕ-ಸ)^೨+ಕಸ}{ಕ-ಸ} \div \frac{(ಕ+ಸ)^೨-ಕಸ}{ಕ+ಸ} - \frac{ಕ^೩-ಸ^೩+ಸ^೩}{ಕ^೨+ಕಸ+ಸ^೨} \div \frac{ಕ^೩+ಸ^೩-ಸ^೩}{ಕ^೨-ಕಸ+ಸ^೨} \quad (೧)$$

$$= \frac{ಕ^೨-ಕಸ+ಸ^೨}{ಕ-ಸ} \times \frac{ಕ+ಸ}{ಕ^೨+ಕಸ+ಸ^೨} - \frac{ಕ^೩}{ಕ^೨+ಕಸ+ಸ^೨} \times \frac{ಕ^೨-ಕಸ+ಸ^೨}{ಕಸ} \quad (೨)$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)}{(ಕ-ನ)(ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨)} - \frac{ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨}{ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨} \quad (೧)$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)-(ಕ-ನ)(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)}{(ಕ-ನ)(ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨)} \quad (೨)$$

$$= \frac{(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)\{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)\}}{(ಕ-ನ)(ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨)} \quad \ldots \ldots (೩)$$

$$= \frac{೨ನ(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)}{(ಕ-ನ)(ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨)}.$$

ನಾಲ್ಕನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಬರೆಯುವ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರೆದು ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$= \frac{ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨}{ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨}\left(\frac{ಕ+ನ}{ಕ-ನ}-೧\right) \ldots \ldots \ldots (೪)$$

$$= \frac{ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨}{ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨} \times \frac{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)}{ಕ-ನ} \quad \ldots \ldots (೫)$$

$= \dfrac{೨ನ(ಕ^೨-ಕನ+ನ^೨)}{(ಕ-ನ)(ಕ^೨+ಕನ+ನ^೨)}$ ಎಂದು ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಕಾಳಜಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. $\dfrac{ಕ}{\substack{ನ\\ಪ}}$ ಹೀಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\substack{ನ\\ಪ}$ ಇದು ಛೇದಕವಿರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೆ $\dfrac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇದು ಛೇದವಿರುವದೋ ಎಂಬ ಸಂದೇಹವು ಓದುಗರ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಬರೆಯುವದರಲ್ಲಿ ಸಂದಿಗ್ಧತೆಯಿರಬಾರದೆಂದು ಮುಖ್ಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ರೇಷೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ದಪ್ಪಾಗಿ ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರಬೇಕು. ಹೇಗೆಂದರೆ ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\substack{ನ\\ಪ}$ ಇದು ಛೇದವಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\dfrac{ಕ}{ನ}$ ಎಂದು

ಇಲ್ಲವೆ $\frac{\frac{ಕ}{ನ}}{ಪ}$ ಎಂದೂ, ಮತ್ತು $\frac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇದು ಛೇದವಿದ್ದರೆ

ಅವನ್ನು $\frac{ಕ}{\frac{ನ}{ಪ}}$ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ $\frac{\frac{ಕ}{ನ}}{ಪ}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\dfrac{೧+\frac{೧}{ಅ}}{೧+ಅ}$.

೨. $\dfrac{ಯ-\frac{ರ^೨}{ಯ}}{೧+\frac{ರ}{ಯ}}$.

೩. $\dfrac{ಪ-\frac{೪}{ಪ}}{ಪ+೧-\frac{೬}{ಪ}}$.

೪. $\dfrac{\frac{ಯ}{ಪ}-\frac{ಪ}{ಯ}}{\frac{೧}{ಪ}-\frac{೧}{ಯ}}$.

೫. $\dfrac{\frac{ರ}{ಲ^೨}-\frac{ಲ}{ರ^೨}}{\frac{೧}{ಲ^೨}-\frac{೧}{ರ^೨}}$.

೬. $\dfrac{ಪ-೭+\frac{೧೦}{ಪ}}{ಪ-೯+\frac{೨೦}{ಪ}}$.

೭. $\dfrac{ಅ-\frac{೬೪}{ಅ^೨}}{೧+\frac{೪}{ಅ}+\frac{೧೬}{ಅ^೨}}$.

೮. $\dfrac{ರ+\frac{ಲ^೨}{ರ+ಲ}}{೧+\frac{ಲ}{ರ-ಲ}}$.

೯. $\dfrac{ಯ+ರ+\frac{ರ^೨}{ಯ-ರ}}{ಯ+ರ+\frac{ರ^೨}{ಯ+ರ}}$.

೧೦. $$\frac{\dfrac{ಪ^{೨}}{ಬಮ}+\dfrac{ಬ^{೨}}{ಪಮ}+\dfrac{ಮ^{೨}}{ಪಬ}-೩}{\dfrac{೧}{ಬಮ}+\dfrac{೧}{ಪಮ}+\dfrac{೧}{ಪಬ}}.$$

೧೧. $$\frac{ಯ-\dfrac{ಯ-೧೨}{ಯ+೮}}{ಯ+\dfrac{ಯ+೨೦}{ಯ+೮}}.$$

೧೨. $$\frac{ಪ-೨-\dfrac{೧೦}{ಪ+೭}}{ಪ-೪-\dfrac{೧೬}{ಪ+೭}}.$$

೧೩. $$\frac{ಯ+\dfrac{೪ಯ-೧}{ಯ^{೨}-೪}}{ಯ+೩+\dfrac{೭}{ಯ-೨}}.$$

೧೪. $$\frac{\dfrac{ಅ^{೨}-ಕ^{೨}}{ಅ-ಕ}-\dfrac{ಅ^{೨}-ಕ^{೨}}{ಅ+ಕ}}{\dfrac{ಅ^{೩}-ಕ^{೩}}{ಅ-ಕ}+\dfrac{ಅ^{೩}+ಕ^{೩}}{ಅ+ಕ}}.$$

೧೫. $$\frac{೩\frac{೧}{೪}(೫-ಯ)-೧೬\frac{೧}{೮}}{೨\frac{೧}{೩}+೧\frac{೧}{೨}\left(ಯ-೧\frac{೮}{೯}\right)}.$$

೧೬. $$\frac{\dfrac{ಪ+ಬ}{೧-ಪಬ}+\dfrac{ಪ-ಬ}{೧+ಪಬ}}{೧-\dfrac{ಪ+ಬ}{೧-ಪಬ}\times\dfrac{ಪ-ಬ}{೧+ಪಬ}}.$$

೧೭. $$\frac{\dfrac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ}+೨ಅ}{\dfrac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ}-೨ಅ}+\frac{\dfrac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ}+೨ಕ}{\dfrac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ}-೨ಕ}$$

೧೮. $$\frac{\dfrac{೧}{ಪ^{೨}}+\dfrac{೧}{ಮ^{೨}}-\dfrac{೨}{ಪಮ}}{\dfrac{೧}{ಪ}-\dfrac{೧}{ಮ}}-\frac{\dfrac{೧}{ಪ^{೨}}+\dfrac{೧}{ಮ^{೨}}+\dfrac{೨}{ಪಮ}}{\dfrac{೧}{ಪ}+\dfrac{೧}{ಮ}}$$

೧೯. $$\frac{ಯ+೪-\dfrac{೩}{ಯ+೨}}{ಯ+೨-\dfrac{೨}{ಯ+೩}}\div\frac{ಯ-೨+\dfrac{೫}{ಯ+೪}}{ಯ-೪+\dfrac{೧೮}{ಯ+೫}}.$$

೬೧. $\dfrac{\dfrac{೪}{ನ}-\dfrac{೭}{ಮ}}{\dfrac{೨}{ನ}+\dfrac{೫}{ಮ}} \div \dfrac{\dfrac{೧೬}{ನ^{೨}}-\dfrac{೪೯}{ಮ^{೨}}}{\dfrac{೮}{ನ^{೩}}+\dfrac{೧೨೫}{ಮ^{೩}}}$

೬೨. $\dfrac{೨-\dfrac{೩}{ಅ}}{೪+\dfrac{೫}{ಕ}} \quad \dfrac{೪+\dfrac{೫}{ಕ}+\dfrac{೪}{ಅ}+\dfrac{೫}{ಅಕ}}{೨-\dfrac{೧}{ಅ}-\dfrac{೩}{ಅ^{೨}}}$

೬೩. $\dfrac{ಪ-೧+\dfrac{೧}{ಪ+೧}}{೧+\dfrac{೧}{ಪ-೧}}\left(೧-\dfrac{೧}{ಪ}\right) \times \dfrac{\dfrac{೧}{ಪ^{೨}-೨ಪ+೧}-ಪ+೧}{ಪ+\dfrac{೧}{ಪ-೧}}.$

೬೪. $\dfrac{\dfrac{ಅ+೭}{ಅ^{೨}+೩ಅ-೧೦}-\dfrac{ಅ+೫}{ಅ^{೨}+೪ಅ-೧೨}}{೨-\dfrac{೩ಅ+೧೭}{ಅ^{೨}+೧೧ಅ+೩೦}} \times \dfrac{ಅ+೨-\dfrac{೮}{ಅ}}{೧-\dfrac{ಅ-೧}{ಅ}}.$

೬೫. $\dfrac{\dfrac{ಪ^{೨}}{ಮ^{೨}}+\dfrac{ಮ^{೨}}{ಪ^{೨}}-೨}{\dfrac{ಪ^{೪}}{ಮ^{೪}}-\dfrac{ಮ^{೪}}{ಪ^{೪}}} \times \dfrac{\dfrac{ಪ}{ಮ}+\dfrac{ಮ}{ಪ}+೧}{\dfrac{೧}{ಮ}-\dfrac{೧}{ಪ}} \div \dfrac{\dfrac{೧}{ಪ}+\dfrac{೧}{ಮ}}{\dfrac{ಪ}{ಮ}+\dfrac{ಮ}{ಪ}}$

೬೬. $\dfrac{\dfrac{೧}{ಬಮ}-\dfrac{೧}{ಪ^{೨}}}{\dfrac{೧}{ಪ^{೨}ಬಮ}} + \dfrac{\dfrac{೧}{ಪಮ}-\dfrac{೧}{ಬ^{೨}}}{\dfrac{೧}{ಪಬ^{೨}ಮ}} + \dfrac{\dfrac{೧}{ಪಬ}-\dfrac{೧}{ಮ^{೨}}}{\dfrac{೧}{ಪಬಮ^{೨}}}$

$$\frac{\dfrac{೧}{ಪಬ}+\dfrac{೧}{ಬಮ}+\dfrac{೧}{ಪಮ}}{\dfrac{೧}{ಪಬಮ}}$$

೯.

ಪರಂಪರಿತ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

೫೧೪. $\dfrac{೩}{೧೦+\dfrac{೪}{೧-\dfrac{೫}{೭-\dfrac{೬}{೧೩}}}}$ ಇದು ಪರಂಪರಿತ (Continued) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಉದಾಹರಣೆಯಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ ೧. $\dfrac{೨}{ಅ+\dfrac{೩}{೪-\dfrac{೪ಅ-೧}{ಅ+೬}}}$ — ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$೪-\frac{೪ಅ-೧}{ಅ+೬}=\frac{೪ಅ+೨೪-೪ಅ+೧}{ಅ+೬}=\frac{೨೫}{ಅ+೬};$$

$$೩\div\frac{೨೫}{ಅ+೬}=\frac{೩(ಅ+೬)}{೨೫};\ ಅ+\frac{೩(ಅ+೬)}{೨೫}$$

$$\frac{೨೫ಅ+೩ಅ+೧೮}{೨೫}$$

$$\frac{೨೮ಅ+೧೮}{೨೫}=\frac{೨(೧೪ಅ+೯)}{೨೫};\ ಮತ್ತು$$

$$೨\div\frac{೨(೧೪ಅ+೯)}{೨೫}=೨\times\frac{೨೫}{೨(೧೪ಅ+೯)}=\frac{೨೫}{೧೪ಅ+೯}$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ನಿಯಮದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$\text{ರಾಶಿಯು} = \frac{೨}{ಅ + \frac{೩(ಅ+೬)}{೪(ಅ+೬)-(೪ಅ-೧)}} = \frac{೨}{ಅ + \frac{೩(ಅ+೬)}{೨೫}}$$

$$= \frac{೨ \times ೨೫}{೨೫ಅ + ೩(ಅ+೬)} = \frac{೨ \times ೨೫}{೨೮ಅ + ೧೮} = \frac{೨ \times ೨೫}{೨(೧೪ಅ + ೯)}$$

$$= \frac{೨೫}{೧೪ಅ + ೯}$$ ಎಂದೂ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಉ. ೨.

$$\frac{ಅ^{೨} - ಅಇ - ಇ^{೨}}{ಇ + \frac{ಅ^{೩}}{ಅ^{೨} - \frac{ಅ^{೩} - ಇ^{೩}}{ಅ + \frac{ಇ^{೨}}{ಅ + ಇ}}}}.$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$ಅ + \frac{ಇ^{೨}}{ಅ+ಇ} = \frac{ಅ^{೨} + ಅಇ + ಇ^{೨}}{ಅ + ಇ}; \quad \frac{ಅ^{೩} - ಇ^{೩}}{೧} \div \frac{ಅ^{೨} + ಅಇ + ಇ^{೨}}{ಅ + ಇ}$$

$$= \frac{(ಅ - ಇ)(ಅ^{೨} + ಅಇ + ಇ^{೨})}{೧} \times \frac{ಅ + ಇ}{ಅ^{೨} + ಅಇ + ಇ^{೨}}$$

$$= (ಅ - ಇ)(ಅ + ಇ) = ಅ^{೨} - ಇ^{೨};$$

$$ಅ^{೨} - (ಅ^{೨} - ಇ^{೨}) = ಇ^{೨}; \quad ಇ + \frac{ಅ^{೩}}{ಇ^{೨}} = \frac{ಇ^{೩} + ಅ^{೩}}{ಇ^{೨}};$$

$$\frac{ಅ^{೨} - ಅಇ + ಇ^{೨}}{೧} \div \frac{ಇ^{೩} + ಅ^{೩}}{ಇ^{೨}} = \frac{ಅ^{೨} - ಅಇ + ಇ^{೨}}{೧} \times \frac{ಇ^{೨}}{ಅ^{೩} + ಇ^{೩}}$$

$$= \frac{ಅ^{೨} - ಅಇ + ಇ^{೨}}{೧} \times \frac{ಇ^{೨}}{(ಅ + ಇ)(ಅ^{೨} - ಅಇ + ಇ^{೨})}$$

$$= \frac{ಇ^{೨}}{ಅ + ಇ}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\cfrac{೧}{\cfrac{೨}{೧-\cfrac{೧}{೧-ಅ}}}$.

೨. $\cfrac{೫}{\cfrac{೩ಪ}{೨+\cfrac{೨}{ಪ-೧}}}$

೩. $\cfrac{೨ಮ}{೧-\cfrac{೧-೪ಮ}{೨-\cfrac{೧}{೧-೨ಮ}}}$.

೪. $\cfrac{೧}{೧-\cfrac{೬}{೭-\cfrac{೧-ನ}{೭-ನ}}}$

೫. $\cfrac{೧}{೩-\cfrac{೧}{೩-\cfrac{೧}{೩-ಯ}}}$

೬. $\cfrac{೧}{೪-\cfrac{೩}{೨+\cfrac{೩ಯ-೧}{೨-೩ಯ}}}$

೭. $ಅ-\cfrac{ಅ-೧}{ಅ+೧-\cfrac{ಅ}{ಅ-೧+\cfrac{೧}{ಅ+೧}}}$.

೮. $ಯ-೨-\cfrac{ಯ-೩}{ಯ-೧-\cfrac{ಯ-೨}{ಯ-೩+\cfrac{೧}{ಯ-೧}}}$

೯. $\cfrac{೧}{೧-\cfrac{೧}{೨-\cfrac{೧}{೧-\cfrac{ಪ}{ಪ-ಮ}}}}$.

೧೦. $\cfrac{ನ}{೧-\cfrac{೬}{೫+\cfrac{೩}{೧+\cfrac{೨}{೧-೩ನ}}}}$.

೧೧. $\cfrac{೧}{\cfrac{೧}{೧+\cfrac{ಮ}{ನ-ಮ-\cfrac{ನ^{೨}}{ನ+ಮ}}}}$.

೧೨. $೧+\cfrac{}{೨+\cfrac{೩}{೭-\cfrac{೪}{೧-\cfrac{೧}{೨-\cfrac{೧}{ಅ}}}}}$

೧೦.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಗ್ರಹೀಕರಣವು.

ಸೂ.೧೫. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ನಮಗೆ ಅನೇಕಸ್ಥಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಲು ಸಹ ಬರಬೇಕು. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸುವದು ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವದು ಇವು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. $\frac{೧}{ಅ} + \frac{೧}{ಕ} = \frac{ಅ+ಕ}{ಅಕ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಅ}{ಕಸ} + \frac{ಕ}{ಅಸ} + \frac{ಸ}{ಅಕ} = \frac{ಅ^೨+ಕ^೨+ಸ^೨}{ಅಕಸ}$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವರೋ, ಅದರಂತೆ ತಿರುಗಿ $\frac{ಅ+ಕ}{ಅಕ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಅ^೨+ಕ^೨+ಕಸ}{ಅಕಸ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ $\frac{ಅ+ಕ}{ಅಕ} = \frac{ಅ}{ಅಕ} + \frac{ಕ}{ಅಕ} = \frac{೧}{ಕ} + \frac{೧}{ಅ}$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $\frac{ಅ^೨+ಕ^೨+ಸ^೨}{ಅಕಸ} = \frac{ಅ^೨}{ಅಕಸ} + \frac{ಕ^೨}{ಅಕಸ} + \frac{ಸ^೨}{ಅಕಸ} = \frac{ಅ}{ಕಸ} + \frac{ಕ}{ಅಸ} + \frac{ಸ}{ಅಕ}$ ಎಂದೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸಲು ನಮಗೆ ಬರಬೇಕು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಗ್ರಹವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{ಅ^೪+೨ಅ^೨ಕ+೨ಅಕ^೨+ಕ^೪}{ಅ^೨+ಕ^೨}$

$$= \frac{ಅ^3}{ಅ^2ಕ^2} + \frac{೨ಅ^2ಕ}{ಅ^2ಕ^2} + \frac{೨ಅಕ^2}{ಅ^2ಕ^2} + \frac{ಕ^3}{ಅ^2ಕ^2}$$

$$= \frac{ಅ}{ಕ^2} + \frac{೨}{ಕ} + \frac{೨}{ಅ} + \frac{ಕ}{ಅ^2}.$$

ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೀಗೆ ಒಡೆಯಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕುಶಲತೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೨. $\frac{೨ಪ}{ಪ^2-ಮ^2}$ ಇದನ್ನು ಎರಡೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{೨ಪ}{ಪ^2-ಮ^2} = \frac{(ಪ+ಮ)+(ಪ-ಮ)}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)}$$

$$= \frac{ಪ+ಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} + \frac{ಪ-ಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)}$$

$$= \frac{೧}{ಪ-ಮ} + \frac{೧}{ಪ+ಮ}.$$

ಉ. ೩. $\frac{೨ಅ+೫}{ಅ^2+೫ಅ+೧೪}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\frac{೨ಅ+೫}{ಅ^2+೫ಅ-೧೪} = \frac{(ಅ+೭)+(ಅ-೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೭)}$$

$$= \frac{ಅ+೭}{(ಅ-೨)(ಅ+೭)} + \frac{ಅ-೨}{(ಅ-೨)(ಅ+೭)}$$

$$= \frac{೧}{ಅ-೨} + \frac{೧}{ಅ+೭}$$

೫. ೧೬. ಎಷ್ಟೋಸಲ (ಭಾಗಹೋಗದಿರುವ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$\frac{೨೪}{೬}$ ಇಲ್ಲಿ ೨೪ಕ್ಕೆ ೬ ರಿಂದ ನಿಃಶೇಷ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ೪ ಇದು ಶುದ್ಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಬರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ $\frac{೨೫}{೬}$ ಇದರಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ೪$\frac{೧}{೬}$, ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಂಥ, ಅಂದರೆಯೇ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ಹೇಗೆ ೪$\frac{೧}{೬}$ ಅಂದರೆ

೪ + $\frac{೧}{೬}$ ಇರುವದೋ ಅದರಂತೆಯೇ ಅ $\frac{ಕ}{ಗ}$ ಅಂದರೆ ಮಾತ್ರ ಅ + $\frac{ಕ}{ಗ}$

ಅಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು. ಅ $\frac{ಕ}{ಗ}$ ಅಂದರೆ ಅ × $\frac{ಕ}{ಗ}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ಭಿನ್ನ ಪದ್ಧತಿಯಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು.

ಅದರಂತೆಯೇ ಅ + $\frac{ಕ}{ಗ}$ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು, ಅ+ $\frac{ಕ}{ಗ}$ ಎಂದು ಎಂದಿಗೂ ಬರೆಯಬಾರದು.

ಉ. ೪. $\frac{ಯ+೯}{ಯ+೬} = \frac{(ಯ+೬)+೩}{ಯ+೬}$

$= \frac{ಯ+೬}{ಯ+೬} + \frac{೩}{ಯ+೬} = ೧ + \frac{೩}{ಯ+೬}.$

ಉ. ೫. $\frac{ಯ-೧೧}{ಯ+೫} = \frac{(ಯ+೫)-೧೬}{ಯ+೫}$

$= \frac{ಯ+೫}{ಯ+೫} - \frac{೧೬}{ಯ+೫} = ೧ - \frac{೧೬}{ಯ+೫}.$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಅಂಶವ ಛೇದ ಅಧಿಕ ಶೇಷ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಆದರ ಮೇಲಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಎಷ್ಟು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಉ. ೬. $\frac{೪ಅ-೧೯}{೨ಅ-೭} = \frac{೪ಅ-೧೪-೫}{೨ಅ-೭}$

$$= \frac{೪(೨ಅ — ೩) — ೭}{೨ಅ — ೩} = ೪ — \frac{೭}{೨ಅ — ೩}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ೮ಅ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ ೨ಅ ಇರುವದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಾಣುತ್ತದೆ, ಅದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪಂಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಶೇಷವೆಂದು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉ. ೭. $\frac{೬ಯ^2 — ೧೧ಯ — ೮}{೨ಯ — ೫}$

$$= \frac{೬ಯ^2 — ೧೫ಯ + ೪ಯ — ೧೦ + ೨}{೨ಯ — ೫}$$

$$= \frac{೩ಯ(೨ಯ — ೫) + ೨(೨ಯ — ೫) + ೨}{೨ಯ — ೫}$$

$$= ೩ಯ + ೨ + \frac{೨}{೨ಯ — ೫}.$$

೫. ೧೭. ಅಂಶದ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವದೆಂಬುದು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು ತೀರ ಸರಳ ಮಾರ್ಗವು. ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋಗುವದಿದ್ದರೆ ಉ. ೪—೭ಗಳ ಕೃತಿಯು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರುವದು.

ಯ + ೭) ಯ + ೯ (೧
ಯ + ೭
೨

$$\therefore \frac{ಯ + ೯}{ಯ + ೭} = ೧ + \frac{೨}{ಯ + ೭};$$

ಯ + ೫) ಯ — ೧೧ (೧
ಯ + ೫
— ೧೬

$$\therefore \frac{ಯ — ೧೧}{ಯ + ೫} = ೧ — \frac{೧೬}{ಯ + ೫};$$

೨ಅ — ೩) ೮ಅ — ೧೯ (೪
೮ಅ — ೧೨
— ೭

$$\therefore \frac{೮ಅ — ೧೯}{೨ಅ — ೩} = ೪ — \frac{೭}{೨ಅ — ೩};$$

ಮತ್ತು

$$೨ಯ - ೫ \;)\; ೬ಯ^2 - ೧೧ಯ - ೮ \;(\; ೩ಯ + ೨$$
$$\underline{೬ಯ^2 - ೧೫ಯ}$$
$$೪ಯ - ೮$$
$$\underline{೪ಯ - ೧೦}$$
$$೨$$

$$\frac{೬ಯ^2 - ೧೧ಯ - ೮}{೨ಯ - ೫} = ೩ಯ + ೨ + \frac{೨}{೨ಯ - ೫}.$$

ಉ. ೮. $\frac{೧}{೧ - ಅ}$ ಇದಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ತ್ರಿಪದವಾಗಿರಬೇಕು.

$$\frac{೧}{೧ - ಅ} = \frac{(೧ - ಅ) + (ಅ - ಅ^2) + (ಅ^2 - ಅ^3) + ಅ^3}{೧ - ಅ}$$
$$= \frac{(೧ - ಅ) + ಅ(೧ - ಅ) + ಅ^2(೧ - ಅ) + ಅ^3}{೧ - ಅ}$$

$$= ೧ + ಅ + ಅ^2 + \frac{ಅ^3}{೧ - ಅ},$$ ಇಲ್ಲವೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಿಸಿ

$$೧ - ಅ \;)\; ೧ \;(\; ೧ + ಅ + ಅ^2$$
$$\underline{೧ - ಅ}$$
$$ಅ$$
$$\underline{ಅ - ಅ^2}$$
$$ಅ^2$$
$$\underline{ಅ^2 - ಅ^3}$$
$$ಅ^3$$



$$\therefore \frac{೧}{೧ - ಅ} = ೧ + ಅ + ಅ^2 + \frac{ಅ^3}{೧ - ಅ}$$

$$\frac{ಅಂಶ}{ಛೇದ} = ಭಾಗಾಕಾರ + \frac{ಶೇಷ}{ಛೇದ}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪದಿಂದ ಬರೆಯಿರಿ.

೧. $\frac{ಅ+ಇ+ಕ}{ಅಕಇ}$. ೨. $\frac{ಕ^{೩}+ಗ^{೩}+ಘ^{೩}}{ಕಗಘ}$.

೩. $\frac{೫ಯ^{೨}-೭ಯರ+ರ^{೨}}{ಯರ}$. ೪. $\frac{ಯ^{೩}+ರ^{೩}+ಲ^{೩}-೩ಯರಲ}{ಯ^{೩}ರ^{೩}ಲ^{೩}}$

೫. $\frac{೨ಕ್ಷ-೭}{(ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೪)}$. ೬. $\frac{೭ರ-೩}{(೫ರ-೨)(೨ರ-೧)}$.

೭. $\frac{೨ಯ-೩}{ಯ^{೨}-೩ಯ+೨}$. ೮. $\frac{೩ಯ+೬}{೨ಯ^{೨}+೭ಯ+೫}$.

೯. $\frac{೨ನ}{ನ^{೨}-೪}$. ೧೦. $\frac{೧೦ಪ}{೨೫ಪ^{೨}-೯}$. ೧೧. $\frac{೮}{೧೬-ಪ^{೨}}$.

೧೨. $\frac{೬}{ಕ್ಷ^{೨}-೯}$. ೧೩. $\frac{೪}{ಯ^{೨}+೧೨ಯ+೩೨}$. ೧೪. $\frac{೨ಪ^{೨}+೨ಮ^{೨}}{ಪ^{೨}-ಮ^{೨}}$.

೧೫. $\frac{೨ಸ^{೨}}{ರ^{೪}-ಸ^{೪}}$. ೧೬. $\frac{೨ಪ^{೩}}{ಪ^{೬}-ಮ^{೬}}$. ೧೭. $\frac{೨ಯ^{೨}+೧೮}{ಯ^{೨}-೯}$.

೧೮. $\frac{೨ಯ^{೨}+೨ರ^{೨}}{ಯ^{೪}+ಯ^{೨}ರ^{೨}+ರ^{೪}}$.

ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಪದಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಈ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

೧೯. $೧\div(೧+ಅ)$. ೨೦. $೧\div(೧-ಅ^{೨})$.

೨೧. $(೧+ಅ)\div(೧-ಅ)$. ೨೨. $ಪ\div(೧+ಪ)$.

೨೩. $(೧+ಪ^{೨})\div(೧+ಪ^{೪})$. ೨೪. $೧\div(೧+ಅ^{೩})$.

೧೧.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು.

೫೧೫. ಕೆಲವು ಸಲ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $ಪ+೪-\frac{೪}{ಪ+೪}$ ಇದಕ್ಕೆ $೧+\frac{೨}{ಪ+೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\left(ಪ+೪-\frac{೪}{ಪ+೪}\right)\left(೧+\frac{೨}{ಪ+೨}\right)$$

$$=\frac{(ಪ+೪)^{೨}-೪}{ಪ+೪}\times\frac{ಪ+೨+೨}{ಪ+೨}$$

$$=\frac{ಪ^{೨}+೮ಪ+೧೨}{ಪ+೪}\times\frac{ಪ+೪}{ಪ+೨}$$

$$=\frac{(ಪ+೨)(ಪ+೬)}{ಪ+೪}\times\frac{ಪ+೪}{ಪ+೨}$$

$$=ಪ+೬.$$

ಉ. ೨. $ರ-೩+\frac{೨೨ರ+೧೪}{ರ^{೨}+೯ರ+೮}$ ಇದಕ್ಕೆ

$ರ-೧+\frac{೧೮}{ರ+೮}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\left(ರ-೩+\frac{೨೨ರ+೧೪}{ರ^{೨}+೯ರ+೮}\right)\div\left(ರ-೧+\frac{೧೮}{ರ+೮}\right)$$

$$=\frac{(ರ-೩)(ರ^{೨}+೯ರ+೮)+೨೨ರ+೧೪}{ರ^{೨}+೯ರ+೮}\div\frac{(ರ-೧)(ರ+೮)+೧೮}{ರ+೮}$$

$$=\frac{ರ^{೩}+೬ರ^{೨}-೧೯ರ-೨೪+೨೨ರ+೧೪}{ರ^{೨}+೯ರ+೮}\div\frac{ರ^{೨}+೭ರ-೮+೧೮}{ರ+೮}$$

$$=\frac{ರ^{೩}+೬ರ^{೨}+೩ರ-೧೦}{ರ+೯ರ+೮}\div\frac{ರ^{೨}+೭ರ+೧೦}{ರ+೮}$$

$$= \frac{(ರ-೧)(ರ+೨)(ರ+೫)}{(ರ+೧)(ರ+೪)} \times \frac{ರ+೪}{(ರ+೨)(ರ+೫)}$$

$$= \frac{ರ-೧}{ರ+೧}.$$

ಉ. ೩. $\frac{ನ+೪}{ನ+೨} + \frac{೨ನ+೧೧}{ನ+೪} - \frac{೩ನ+೧೪}{ನ+೩}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{ನ+೪}{ನ+೨} + \frac{೨ನ+೧೧}{ನ+೪} - \frac{೩ನ+೧೪}{ನ+೩}$$

$$= \left(೧+\frac{೨}{ನ+೨}\right) + \left(೨+\frac{೩}{ನ+೪}\right) - \left(೩+\frac{೫}{ನ+೩}\right) \quad \ldots \quad (೧)$$

$$= \frac{೨}{ನ+೨} + \frac{೩}{ನ+೪} - \frac{೫}{ನ+೩} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (೨)$$

$$= \frac{೨(ನ+೪)(ನ+೩)+೩(ನ+೨)(ನ+೩)-೫(ನ+೪)(ನ+೨)}{(ನ+೨)(ನ+೩)(ನ+೪)} \quad (೩)$$

$$= \frac{೨(ನ^೨+೭ನ+೧೨)+೩(ನ^೨+೫ನ+೬)-೫(ನ^೨+೬ನ+೮)}{(ನ+೨)(ನ+೩)(ನ+೪)} \quad (೪)$$

$$= \frac{೨ನ^೨+೧೪ನ+೨೪+೩ನ^೨+೧೫ನ+೧೮-೫ನ^೨-೩೦ನ-೪೦}{(ನ+೨)(ನ+೩)(ನ+೪)} \quad (೫)$$

$$= \frac{೨-ನ}{(ನ+೨)(ನ+೩)(ನ+೪)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (೬)$$

ಉ. ೪. $\frac{ಯ^೨}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ^೨+೪ಯ+೨}{ಯ+೨} + \frac{ಯ^೨+೪ಯ+೪}{ಯ+೩}$

ರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{೨ಯ^೨+೪ಯ-೨}{ಯ+೨} + \frac{ಯ^೨+೪ಯ+೪}{ಯ+೩}$$

$$= \frac{ಯ^೨-೧+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{ಯ^೨+೪ಯ+೩+೧}{ಯ+೩} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (೧)$$

$$= \frac{(ಯ-೧)(ಯ+೧)+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{(ಯ+೧)(ಯ+೩)+೧}{ಯ+೩} \quad \ldots \quad \ldots \quad (೨)$$

$$= ಯ-೧+\frac{೧}{ಯ+೧} - ೨ಯ - \frac{೨}{ಯ+೨} + ಯ+೧+\frac{೧}{ಯ+೩} \quad \ldots \quad \ldots \quad (೩)$$

$$= \frac{೧}{ಯ+೧} - \frac{೨}{ಯ+೨} + \frac{೧}{ಯ+೩} \quad \ldots \quad (೪)$$

$$= \frac{(ಯ+೨)(ಯ+೩)-೨(ಯ+೧)(ಯ+೩)+(ಯ+೧)(ಯ+೨)}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \quad (೫)$$

$$= \frac{(ಯ^೨+೫ಯ+೬)-೨(ಯ^೨+೪ಯ+೩)+ಯ^೨+೩ಯ+೨}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \quad \ldots \quad (೬)$$

$$= \frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (೭)$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡದೆ ಇದ್ದರೆ ಕೃತಿಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

೧. $ಯ-೫+\frac{೫}{೨ಯ-೩}$ ಇದಕ್ಕೆ $೧-\frac{೪}{೨ಯ-೫}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೨. $೩ಯ + ೭ + \frac{೧೬}{ಯ - ೩}$ ಇವಕ್ಕೆ $೧ - \frac{೪}{೩ಯ - ೫}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೩. $\frac{ಅ}{ಕ^{೨}} + \frac{ಕ}{ಅ^{೨}}$ ಇವಕ್ಕೆ $\frac{೧}{ಕ^{೨}} - \frac{೧}{ಅಕ} + \frac{೧}{ಅ^{೨}}$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೪. $\frac{ಪ^{೨}}{ಮ^{೨}} + ೧ + \frac{ಮ^{೨}}{ಪ^{೨}}$ ಇವಕ್ಕೆ $\frac{೧}{ಮ^{೨}} + \frac{೧}{ಪಮ} + \frac{೧}{ಪ^{೨}}$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೫. $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨} + \frac{೨ಮ^{೩}}{ಪ - ಮ}$ ಇವಕ್ಕೆ $೧ + \frac{೨ಮ}{ಪ - ಮ}$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೬. $ಯ^{೨} + ವ^{೨} - \frac{ಯ^{೨}ವ^{೨}}{ಯ^{೨} + ವ^{೨}}$ ಇವಕ್ಕೆ $೧ - \frac{ಯವ}{ಯ^{೨} + ವ^{೨}}$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೭. $ಪ - ೭ + \frac{೪}{ಪ - ೩}$ ಇವಕ್ಕೆ $೧ + \frac{೨}{ಪ - ೫}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೮. $೧ + \frac{ಮ^{೨}}{ಪ^{೨} - ಮ^{೨}}$ ಇವಕ್ಕೆ $೧ + \frac{೩ಪಮ}{(ಪ - ಮ)^{೨}}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೯. $\frac{ರ - ೪}{ರ - ೧} - \frac{೨ರ - ೬}{ರ - ೨} + \frac{ರ - ೨}{ರ - ೩}$.

೧೦. $\frac{೮ಯ - ೩೦}{ಯ - ೪} + \frac{೨ಯ - ೫}{ಯ - ೨} - \frac{೧೦ಯ + ೬೧}{ಯ + ೬}$.

೧೧. $\frac{೩ಯ^{೨} - ೧೦ಯ + ೪}{ಯ - ೩} + \frac{೨ಯ - ೫ಯ + ೩}{ಯ - ೨} - \frac{೫ಯ - ೭ಯ + ೪}{ಯ - ೧}$.

೧೨. $\frac{ಪ^{೨} + ೨ಪಮ + ಮ^{೨} + ೧}{ಪ + ಮ} - \frac{೨ಪ^{೨} + ೪ಪಮ + ೨}{ಪ + ೨ಮ} + \frac{ಪ^{೨} - ೨ಪಮ + ಮ^{೨} + ೧}{ಪ - ಮ}$

ಆರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.

೬.೧. ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು. ೨೧—೫೪ ಮತ್ತು ೨೦೯—೨೨೨) ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವದು ಅಂದರೆಯೇ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅದೇ ವಿಷಯದ ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಜೋಡಿಯೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಸಾದಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅದಕ್ಕೆ ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ, (**ಅಯ + ಇರ = ಕ**) ಈ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು.

ಉ.೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೫(ಯ − ೩ರ) − ೨(೩ಯ + ೪ರ − ೧೦) = ೩ − ೪ಯ;

೮(೨ರ − ಯ) + ೫(೩ಯ − ೪ರ + ೧) = ೩(ಯ + ರ) − ೪.

ಮೊ. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ ೫ಯ − ೧೫ರ − ೬ಯ − ೮ರ + ೨೦ = ೩ − ೪ಯ

∴ −ಯ − ೨೩ರ + ೨೦ = ೩ − ೪ಯ

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, −ಯ − ೨೩ರ + ೪ಯ = ೩ − ೨೦

∴ ೩ಯ − ೨೩ರ = −೧೭ .... (೧)

೨. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ, ೧೬ರ − ೮ಯ + ೧೫ಯ − ೨೦ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ − ೪

∴ ೭ಯ − ೪ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ − ೪

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೭ಯ − ೪ರ − ೩ಯ − ೩ರ = −೪ − ೫

∴ ೪ಯ − ೭ರ = −೯ .... (೨)

೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, −೧೨ಯ − ೨೧ರ = −೨೭ .... (೨ಅ)

(೧) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಹೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ −೭೧ರ = −೭೧

∴ ರ = ೧

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೧ ಎಂದು ಹಿಡಿದು, —ಯ—೭ = —೯

ಅಂ. —ಯ = —೨, ಅಂ. ಯ = ೨.

ಯ = ೨, ರ = ೧.

ಉ.೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$ಯ - \frac{೩ರ - ೨ಯ - ೧}{೮} = \frac{೨ಯ - ೭ರ + ೧}{೩} - ೧;$$

$$೨ರ - \frac{೫ರ - ಯ + ೨}{೫} = ೪ಯ - ೩ - \frac{೭ಯ + ೨ರ}{೨}.$$

ಮೊ.ಸ.ಕ್ಕೆ ೨೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೨೪ಯ — ೩(೩ರ — ೨ಯ — ೧) = ೮(೨ಯ — ೭ರ + ೧) — ೨೪

∴ ೨೪ಯ — ೯ರ + ೬ಯ + ೩ = ೧೬ಯ — ೫೬ರ + ೮ — ೨೪

∴ ೩೦ಯ — ೯ರ + ೩ = ೧೬ಯ — ೫೬ರ — ೧೬

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೩೦ಯ — ೯ರ — ೧೬ಯ + ೫೬ರ = —೧೬ — ೩

∴ ೧೪ಯ + ೪೭ರ = —೧೯ .... (೧)

ಎ.ಸ.ಕ್ಕೆ ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೨೦ರ — ೨(೫ರ — ಯ + ೨) = ೪೦ಯ — ೩೦ — ೫(೭ಯ + ೨ರ)

∴ ೨೦ರ — ೧೦ರ + ೨ಯ — ೪ = ೪೦ಯ — ೩೦ — ೩೫ಯ — ೧೦ರ

∴ ೧೦ರ + ೨ಯ — ೪ = ೫ಯ — ೧೦ರ — ೩೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೧೦ರ + ೨ಯ — ೫ಯ + ೧೦ರ = —೩೦ + ೪

∴ —೩ಯ + ೨೦ರ = —೨೬ .... (೨)

೧೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, —೪೨ಯ + ೨೮೦ರ = —೩೬೪

(೧)ಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೪೨ಯ + ೧೪೧ರ = —೫೭

ಕೂಡಿಸುವದರಿಂದ, ೪೨೧ರ = —೪೨೧

∴ ರ = —೧.

(೨)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = —೧ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, —೩ಯ—೨೦ = —೨೬,

ಅಂ. —೩ಯ = —೬, ಅಂ. ಯ = ೨.

ಯ = ೨, ರ = —೧.

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$\frac{೬ಯ - ರ - ೧}{೫} = \frac{೩ಯ + ೭ರ - ೨}{೭} = \frac{೫ಯ - ೩ರ - ೩}{೨}.$$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{೬ಯ - ರ - ೧}{೫} = \frac{೫ಯ - ೩ರ - ೩}{೨}$ ಮತ್ತು

$\frac{೩ಯ + ೭ರ - ೨}{೭} = \frac{೫ಯ - ೩ರ - ೩}{೨}$ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು

ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ಮೊ.ಸ.ದ ಮೇಲಿಂದ $೫(೫ಯ - ೩ರ - ೩) = ೨(೬ಯ - ರ - ೧)$

$\therefore ೨೫ಯ - ೧೫ರ - ೧೫ = ೧೨ಯ - ೨ರ - ೨$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೨೫ಯ - ೧೫ರ - ೧೨ಯ + ೨ರ = -೨ + ೧೫$

$\therefore ೧೩ಯ - ೧೩ರ = ೧೩$

೧೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ಯ - ರ = ೧$ (೧)

ಎ. ಸ. ದ ಮೇಲಿಂದ $೭(೫ಯ - ೩ರ - ೩) = ೨(೩ಯ + ೭ರ - ೨)$

$\therefore ೩೫ಯ - ೨೧ರ - ೨೧ = ೬ಯ + ೧೪ರ - ೪$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೩೫ಯ - ೨೧ರ - ೬ಯ - ೧೪ರ = -೪ + ೨೧$

$\therefore ೨೯ಯ - ೩೫ರ = ೧೭$ (೨)

(೧) ನೇಯುದನ್ನು ೨೯ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $೨೯ಯ - ೨೯ರ = ೨೯$

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ $-೬ರ = -೧೨$

$\therefore ರ = ೨$

(೧) ನೇಯುದರಲ್ಲಿ ರ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, $ಯ - ೨ = ೧$,

ಅಂ. $ಯ = ೩$

ಯ = ೩ ; ರ = ೨.

ಉ.೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$(ಯ + \tfrac{೧}{೨})(ರ + \tfrac{೧}{೩}) - ೪ = (ಯ - \tfrac{೧}{೨})(ರ - \tfrac{೧}{೩});$$

$$(೨ಯ - ೧)(೩ರ + ೧) = (೩ಯ - \tfrac{೧}{೨})(೨ರ + \tfrac{೧}{೩}) - ೧.$$

ಮೊ. ಸ. ವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ,

ಯರ + $\frac{೧}{೨}$ಯ + $\frac{೨}{೩}$ರ + $\frac{೧}{೩}$ − ೪ = ಯರ − $\frac{೧}{೨}$ಯ − $\frac{೧}{೩}$ರ + $\frac{೧}{೬}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ಯರ ವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕೆ,

$\frac{೧}{೨}$ಯ + $\frac{೨}{೩}$ರ − ೩$\frac{೨}{೩}$ = −$\frac{೧}{೨}$ಯ − $\frac{೧}{೩}$ರ + $\frac{೧}{೬}$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $\frac{೧}{೨}$ಯ + $\frac{೨}{೩}$ರ + $\frac{೧}{೨}$ಯ + $\frac{೧}{೩}$ರ = $\frac{೧}{೬}$ + ೩$\frac{೨}{೩}$

∴ ಯ + ರ = ೩$\frac{೫}{೬}$ .... (೧)

ಎ. ಸ. ವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ೬ ಯರ + ೨ಯ − ೩ರ − ೧ = ೬ಯರ + ಯ − ರ − $\frac{೨}{೩}$ + −೧. ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ೬ ಯರ ವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿ, ೨ಯ − ೩ರ − ೧ = ಯ − ರ − ೧$\frac{೨}{೩}$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೨ಯ − ೩ರ − ಯ + ರ = −೧$\frac{೨}{೩}$ + ೧

∴ ಯ − ೨ರ = −$\frac{೨}{೩}$ .... (೨)

(೧) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

೩ರ = ೪$\frac{೧}{೨}$, ಅಂ. ರ = ೧$\frac{೧}{೨}$.

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೧$\frac{೧}{೨}$ ಹಿಡಿದು, ಯ + ೧$\frac{೧}{೨}$ = ೩$\frac{೫}{೬}$,

ಅಂ. ಯ = ೩$\frac{೫}{೬}$ − ೧$\frac{೧}{೨}$ = ೨$\frac{೧}{೩}$.

ಯ = ೨$\frac{೧}{೩}$; ರ = ೧$\frac{೧}{೨}$.

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೭ಯ - \frac{೨೧ರ}{೨} = ೧೫೪ ; \quad ೧೧ಯ - \frac{೧೪೩ರ}{೨} = ೨೨.$$

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೭ ಇದು ಅವಯವವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೧೧ ಇದು ಅವಯವವಿದ್ದುದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಿತ್ಯದ ರೂಢಿಯ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋಗದೇ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಮೊ. ಸ. ವನ್ನು ೭ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ − $\frac{೩}{೨}$ರ = ೨೨ .... (೧)

ಎ. ಸ. ವನ್ನು ೧೧ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ − $\frac{೧೩}{೨}$ರ = ೨ .... (೨)

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, ೫ರ = ೨೦

∴ ರ = ೪

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೪ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

ಯ − ೬ = ೨೨, ಆಂ. ಯ = ೨೮.

ಯ = ೨೮; ರ = ೪.

ಉ. ೬. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧೪೮ಯ + ೧೯೫ರ = ೧೨೨೪; ೧೯೫ಯ + ೧೪೮ರ = ೧೧೭೭.

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ,

೩೪೩ಯ + ೩೪೩ರ = ೨೪೦೧

೩೪೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ, ಯ + ರ = ೭ .... (೧)

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ, — ೪೭ಯ + ೪೭ರ = ೪೭

∴ — ಯ + ರ = ೧ (೨)

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ,

೨ರ = ೮, ಆಂ. ರ = ೪. ಆದುದರಿಂದ ಯ = ೩.

ಯ = ೩; ರ = ೪.

ಉ. ೭. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧೨೪ಯ + ೮೩ರ = ೪೯೭; ೧೧೬ಯ + ೭೭ರ = ೪೬೩.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ

೨೪೦ಯ + ೧೬೦ರ = ೯೬೦

ಮತ್ತು ೮೦ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೩ಯ + ೨ರ = ೧೨ (೧)

ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ, ೮ಯ + ೬ರ = ೩೪ (೨)

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೯ಯ + ೬ರ = ೩೬ (೩)

(೩) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಯ = ೨

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ = ೨ ಎಂದು ಹಾಕಿ,

೬ + ೨ರ = ೧೨, ಆಂ. ೨ರ = ೧೨ − ೬ = ೬. ಆಂ. ರ = ೩.

∴ **ಯ = ೨; ರ = ೩.**

ಉ. ೮. ಬಿಡಿಸಿರಿ : ೧೧೭ಯ − ೩೭ರ = ೮೬; ೩೭ಯ + ೪೩ರ = ೨೪೬.

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

೮೦ಯ − ೮೦ರ = — ೧೬೦

೮೦ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಯ − ರ = − ೨

ಈಗ ೧೧೭ಯ + ೩೭ರ = ೮೬, ಅ.ಅ. ೮೦ಯ + ೩೭(ಯ − ರ) = ೮೬

∴ ೮೦ಯ + ೩೭(− ೨) = ೮೬, ೮೦ಯ = ೮೬ + ೭೪ = ೧೬೦.

∴ **ಯ = ೨; ರ = ೪.**

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಬೇಗನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸ ರೀತಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮ)

೬೨. **ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ** ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟದ್ದು ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಮೂರು ರೀತಿಗಳನ್ನು — **ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ, ಉತ್ಥಾಪನ (ಇಲ್ಲವೆ ಆದೇಶ) ರೀತಿ,** ಮತ್ತು **ತುಲನೆಯ ರೀತಿ**— ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಯಾವದೇ **ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** ಸಾದಾ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿ ಅದನ್ನು **ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦** ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦ .... (೧) ಮತ್ತು

ಆಯ + ಈರ + ಊ = ೦ .... (೨) ಇದು ಒಂದು ಜೋಡಿ ಇದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

(೧) ನೆಯದನ್ನು ಈ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, ಅಈಯ + ಇಈರ + ಈಉ = ೦

ಮತ್ತು(೨)ನೆಯದನ್ನು ಇ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, ಆಇಯ+ಇಈರ+ಇಊ = ೦

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, (ಅಈ — ಆಇ)ಯ + ಈಉ — ಇಊ = ೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, (ಅಈ — ಆಇ)ಯ = ಇಊ + ಈಉ

$$\therefore \frac{\text{ಯ}}{\text{ಇಊ} + \text{ಈಉ}} = \frac{೧}{\text{ಅಈ} - \text{ಆಇ}}$$

ಅದರಂತೆಯೇ(೨)ನೇಯದನ್ನು ಅ ದಿಂದಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅಆಯ+ಅಈರ+ಊಅ=೦,

ಮತ್ತು (೧) ನೇಯದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಆಅಯ+ಆಇರ+ಉಆ=೦

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, (ಅಈ−ಆಇ)ರ+ಊಅ−ಉಆ=೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ (ಅಈ—ಆಇ)ರ = ಉಆ−ಊಅ

$$\therefore \frac{ರ}{ಉಆ - ಊಅ} = \frac{೧}{ಅಈ - ಆಇ}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{ಇಊ - ಈಉ} = \frac{ರ}{ಉಆ - ಊಅ} = \frac{೧}{ಅಈ - ಆಇ}$$

ಇದಕ್ಕೆ **ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದ** ಇಲ್ಲವೆ **ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮ**ವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗೆ ಇರುವದು. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಆ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಸ್ಥಿರಪದವನ್ನೂ, ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗಾಗಿ ತಿರುಗಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ಎರಡು ಸಾಲು-ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.



ಅಧೋಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಗುಣಾಕಾರಗಳು

ಧನ ಮತ್ತು ಉನ್ಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು

ಋಣ ಇರುವವು.

ಇಊ + ಈಉ, ಉಆ—ಊಅ ಮತ್ತು **ಅಈ — ಆಇ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಯ, ರ,** ಮತ್ತು ೧ ರ ಭೇದಗಳಿರುವವು.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ **ಉ. ೨.** ರೊಳಗಿನ $೧೪ಯ+೪೭ರ+೧೯=೦$ ಮತ್ತು $೩ಯ-೨೦ರ-೨೬=೦$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ; ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ,

$$\frac{ಯ}{೪೭(-೨೬)-(-೨೦)೧೯} = \frac{ರ}{೧೯\cdot೩-(-೨೬)೧೪} = \frac{೧}{೧೪(-೨೦)-೩\cdot೪೭}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{-೧೨೨೨+೩೮೦} = \frac{ರ}{೫೭+೩೬೪} = \frac{೧}{-೨೮೦-೧೪೧}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{-೮೪೨} = \frac{ರ}{೪೨೧} = \frac{೧}{-೪೨೧}$$

$$\therefore \quad ಯ = \frac{-೮೪೨}{-೪೨೧} = ೨ \text{ ಮತ್ತು } ರ = \frac{೪೨೧}{-೪೨೧} = -೧.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧. $\frac{ಯ}{೩}+\frac{ರ}{೪} = ೭;\ ಯ-ರ=೧೪.$

೨. $\frac{ಪ-ಮ}{೩}+\frac{ಪ+ಮ}{೪\ ರ} = ೫;\ \frac{ಪ-ಮ}{೪} - \frac{ಪ+ಮ}{೩} = ೫.$

೩. $\frac{ದ+೯}{ನ} = ೪\frac{೧}{೩};\ \frac{ದ}{ನ-೧} = ೨\frac{೧}{೩}.$

೪. $೫ನ+೨ಮ=೩ನ+೫ಮ=೧೯.$

೫. $೩ಯ-೮ರ+೪=೫ಯ-೧೦ರ+೩\frac{೧}{೩}=೬ಯ-೪ರ-೯.$

೬. $\frac{ಪ+ಮ-೧}{೫} = \frac{ಪ-ಮ+೧}{೪} = ೧.$

೭. $\frac{೫}{ಯ-ತ} = \frac{೨೦}{ಯ+ರ} = \frac{೧}{೨}.$

೮. $\text{೪}(\text{೩ಯ} - \text{ರ}) = \text{೧೮}\left(\frac{\text{ಯ}}{\text{೨}} - \frac{\text{ರ}}{\text{೪}}\right) = \text{೯}.$

೯. $\frac{\text{೧}}{\text{೨}}(\text{೧೩} - \text{೭ಯ} - \text{ರ}) = \frac{\text{೨}}{\text{೩}}(\text{೩} - \text{ಯ} - \text{೨ರ}) = \frac{\text{೧}}{\text{೫}}(\text{೮} - \text{೨ಯ} - \text{೭ರ}).$

೧೦. $\frac{\text{೨ರ} + \text{೮ವ}}{\text{೧೬}} = \frac{\text{೧೫}}{\text{೨}} = \frac{\text{೧೫}(\text{ರ} - \text{ವ}) - (\text{೨೫ವ} - \text{೯ರ})}{\text{೯೦}}.$

೧೧. $\frac{\text{೭ಸ}}{\text{೧೦}} = \frac{\text{೩ಮ}}{\text{೮}} = \text{೫};\ \frac{\text{೩ಸ}}{\text{೫}} + \frac{\text{೪ಮ}}{\text{೩}} + \text{೨}\frac{\text{೧}}{\text{೩}} = \text{೦}.$

೧೨. $\frac{\text{ತ}}{.\text{೨}} + \frac{\text{ಸ}}{.\text{೩}} = \text{೨೦};\ \frac{\text{೩ಸ}}{.\text{೫}} - \frac{\text{೫ತ}}{.\text{೯}} + \frac{\text{೧}}{\text{೯}} = \text{೭}.$

೧೩. $\frac{\text{೫ಯ} - \text{೨ರ}}{\text{೮ಯ} + \text{ರ}} = \frac{\text{೧}}{\text{೧೦}};\ \text{೩}(\text{ಯ} + \text{ರ} + \text{೨}) = \text{೫}(\text{ರ} - \text{೩ಯ} + \text{೫}) + \text{೯}.$

೧೪. $\frac{\text{೫ಯ} - \text{೮}}{\text{೨ಯ} - \text{೧}} = \frac{\text{೫ರ} + \text{೧}}{\text{೨ರ} + \text{೭}};\ \frac{\text{೪ಯ} - \text{೩}}{\text{೮ಯ} - \text{೯}} = \frac{\text{೩ರ} + \text{೨}}{\text{೬ರ} + \text{೧}}.$

೧೫. $\frac{\text{೮}}{\text{ಕ}} - \frac{\text{೩}}{\text{ಸ}} = \frac{\text{೪}}{\text{ಕಸ}};\ \frac{\text{೫}}{\text{ಕ}} + \frac{\text{೨}}{\text{ಸ}} = \frac{\text{೧೮}}{\text{ಕಸ}}.$

೧೬. $\frac{\text{೧೨}}{\text{ಕ್ಷ}} + \text{೮} = \frac{\text{೧೫ಯ}}{\text{ಕ್ಷ}};\ \frac{\text{೪}}{\text{ಯ}} + \text{೩}\frac{\text{೧}}{\text{೨}} = \frac{\text{೩ಕ್ಷ}}{\text{ಯ}}.$

೧೭. $\text{೮}(\text{ಪ} - \text{೬}) + \text{೨}(\text{೪} - \text{ಲ}) = \text{೨};$

$$\frac{\text{೧೧}}{\text{ಪ} + \text{೩}} + \frac{\text{೭}}{\text{ಲ} + \text{೮}} = \text{೪}\left(\frac{\text{೧೦}}{\text{ಪ} + \text{೩}} - \frac{\text{೭}}{\text{ಲ} + \text{೮}}\right).$$

೧೮. $\text{೧೯}\left(\frac{\text{೪}}{\text{ಅ} - \text{ಕ}} + \frac{\text{೭}}{\text{೨ಅ} + \text{೩ಕ}}\right) = \text{೩೫}\left(\frac{\text{೨}}{\text{ಅ} - \text{ಕ}} + \frac{\text{೫}}{\text{೨ಅ} + \text{೩ಕ}}\right);$

$\text{೩}(\text{ಅ} - \text{೨ಕ} + \text{೩}) = \text{೧೫} - \text{೪}(\text{೩ಕ} - \text{ಅ} - \text{೧}).$

೧೯. $\frac{\text{೩ಯ} + \text{೭ರ}}{\text{೫ರ} - \text{೧೩ಯ}} = \text{೨};\ \text{೮}(\text{೩ಯ} - \text{೪ರ} + \text{೫}) =$

$\text{೫}(\text{೩ರ} - \text{೮ಯ} + \text{೨}).$

೩೦. ೨೭ಯ + ೪೯ರ = ೧೦೩; ೪೯ಯ + ೨೭ರ = ೧೨೫.

೩೧. ೧೦೮ರ − ೭೯ವ = ೪೮೨; ೭೯ರ − ೧೦೮ವ = ೪೫೩.

೩೨. ೧೨೫ಯ + ೮೭ಕ್ಷ = ೪೯; ೩೭ಯ + ೨೧ಕ್ಷ = ೫.

೩೩. ೧೦೩ರ − ೩೩ಸ = ೨೭೬; ೩೩ರ + ೩೭ಸ = ೧೩೬.

೨.

ಅ/ಯ + ಇ/ರ = ಉ; ಅ/ಯ + ಈ/ರ = ಊ.

೬೩. ಈಗ ೨/ಯ + ೧೫/ರ = ೪ .... (೧); ೩/ಯ + ೧೦/ರ = ೩½ (೨)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವು ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಬಿಡಿಸಿದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪದಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (**ಯ, ರ**) ಅಂಶಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರದೆ ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ.

ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವದು? ಇಲ್ಲಿ ೧/ಯ ಮತ್ತು ೧/ರ ಇವುಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಮ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

೨ಪ + ೧೫ಮ = ೪........(೩) ಮತ್ತು

೩ಪ + ೧೦ಮ = ೩½ ....(೪) ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ತರುವಾಯ

(೩)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೬ಪ + ೪೫ಮ = ೧೨

ಮತ್ತು (೪) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೬ಪ + ೨೦ಮ = ೭

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ ೨೫ಮ = ೫, ಅಂ. ಮ = ೧/೫.

(೩) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಮ = ೧/೫ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

೨ಪ + ೩ = ೪, ಅಂ. ೨ಪ = ೧, ಅಂ. ಪ = ೧/೨.

∴ ಪ = ೧/೨ ಮತ್ತು ಮ = ೧/೫

∴ **ಯ = ೨; ರ = ೫.**

ಆದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{ರ}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳಿಂದ ಮಾಡದೇ ಕೂಡ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಸರಳವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೬}{ಯ} + \frac{೪೫}{ರ} = ೧೨$ ಮತ್ತು

(೨) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೬}{ಯ} + \frac{೨೦}{ರ} = ೭$

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ $\frac{೨೫}{ರ} = ೫.$

ಅಂ $ರ = ೫.$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $ರ = ೫$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು $\frac{೨}{ಯ} + ೩ = ೪,$

ಅಂ. $\frac{೨}{ಯ} = ೧$, ಅಂ $ಯ = ೨$. $ಯ = ೨$; $ರ = ೫$.

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವ ಮಾರ್ಗವು ನಮಗೆ ಸರಿ ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೆಯದು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ೧ ಇರದೇ ೧ ಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆ ಇವೆ.

ಉ.೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\frac{೮}{೩ಯ} - \frac{೩}{೨ರ} = ೧೧$; $\frac{೩}{೨ಯ} + \frac{೫}{೮ರ} = ೩\frac{೧}{೪}.$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೩ ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ಪ. ೬ ಇದರಿಂದ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨ ಮತ್ತು ೮ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ಪ. ೮ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ,

$\frac{೧೬}{ಯ} - \frac{೯}{ರ} = ೬೬$ .... (೧)

ಮತ್ತು $\frac{೧೨}{ಯ} + \frac{೫}{ರ} = ೨೬ \quad .... \quad (೨)$

(೧)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೪೮}{ಯ} - \frac{೨೭}{ರ} = ೧೯೮$

ಮತ್ತು(೨)ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೪೮}{ಯ} + \frac{೨೦}{ರ} = ೧೦೪$

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ, $- \frac{೪೭}{ರ} = ೯೪$

$\therefore ರ = -\frac{೧}{೨}$

೨ನೆಯದರಲ್ಲಿ $ರ = -\frac{೧}{೨}$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$\frac{೧೨}{ಯ} - ೧೦ = ೨೬$, ಅಂ. $\frac{೧೨}{ಯ} = ೩೬$, ಅಂ. $ಯ = \frac{೧}{೩}$.

$\therefore ಯ = \frac{೧}{೩}; \quad ರ = \frac{೧}{೨}.$

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅವು ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲ.

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೨ಯ} - \frac{೮}{೩ರ} = ೬\frac{೫}{೬}; \quad ೧೨ಯ + ೨ರ = ೯ಯರ.$$

ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಯರ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ ರ ಗಳು ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಮಾನವು ಶೂನ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.)

$\frac{೧೨}{ರ} + \frac{೨}{ಯ} = ೯$ ಅಂದರೆಯೇ $\frac{೨}{ಯ} + \frac{೧೨}{ರ} = ೯.$

ಮೊ. ಸ. ವನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $\frac{೧೫}{ಯ} - \frac{೧೬}{ರ} = ೪೧ \quad .... \quad (೧)$

ಮತ್ತು $\frac{೨}{ಯ} + \frac{೧೨}{ರ} = ೯$ .... (೨)

ನಿತ್ಯದಂತೆ $\frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{ರ}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅ ಮತ್ತು ಕ ಗಳಿಂದ

ಮಾಡಿದರೆ, $೧೫ಅ - ೧೬ಕ = ೪೧$ .... (೩)

ಮತ್ತು $೨ಅ + ೧೨ಕ = ೯$ .... (೪)

(೩)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೪೫ಅ - ೪೮ಕ = ೧೨೩$ ಮತ್ತು

(೪)ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೮ಅ + ೪೮ಕ = ೩೬$

ಜೋಡಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ $೫೩ಅ = ೧೫೯$, ಅಂ. ಅ=೩.

(೪)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ=೩ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, $೬ + ೧೨ಕ = ೯$ ಅಂ. ೧೨ಕ=೩,

ಅಂ. ಕ=$\frac{೧}{೪}$.

∴ ಅ = ೩, ಮತ್ತು ಕ=$\frac{೧}{೪}$.

∴ ಯ = $\frac{೧}{೩}$; ರ=೪.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೪ಪ - ೫ಮ = ೦; \quad \frac{೩}{೮ಪ} - \frac{೧}{೧೫ಮ} = \frac{೧}{೬}.$$

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ ೪ಪ = ೫ಮ. ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ೪ಪ, ದ ಬದಲಾಗಿ ೫ಮ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{೩}{೧೦ಮ} - \frac{೧}{೧೫ಮ} = \frac{೧}{೬} \text{ ಅಂ. } \frac{೯-೨}{೩೦ಮ} = \frac{೧}{೬},$$

$$\text{ಅಂ. } \frac{೭}{೩೦ಮ} = \frac{೭}{೬}. \text{ ಅಂ. } ೩೦ಮ = ೬,$$

ಅಂ. ಮ = $\frac{೭}{೫}$, ಮತ್ತು ೪ಪ = ೫ಮ ಇದ್ದುದರಿಂದ

೪ಪ = ೭, ಅಂ. ಪ = $\frac{೭}{೪}$, ಮ = $\frac{೭}{೫}$.

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೮ಅ - ೩ಕ = ೧; \quad \frac{೧}{೩ಅ} - \frac{೫}{೬ಕ} = ೦.$$

ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ $\frac{೧}{೩ಅ} = \frac{೫}{೬ಕ}$ ಅಂ. ೬ಕ = ೧೫ಅ, ಅಂ. ೩ಕ = ೭$\frac{೧}{೨}$ಅ.

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ೩ಕ, ದ ಬದಲಾಗಿ ೭$\frac{೧}{೨}$ ಅ ಇಟ್ಟರೆ,

ಲಅ − ೭$\frac{೧}{೨}$ಅ = ೧, ಅಂ. $\frac{೧}{೨}$ಅ = ೧, ಅಂ. ಅ = ೨.

ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

೧೬ − ೩ಕ = ೧, ಅಂ. ೩ಕ = ೧೫, ಅಂ. ಕ = ೫. ಅ = ೨; ಕ = ೫.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧. $\frac{೧೭}{ಯ} - \frac{೨}{ರ} - ೫ = ೦; \frac{೧೦}{ಯ} - \frac{೧೧}{ರ} + \frac{೧}{೩} = ೦.$

೨. $\frac{೨೫}{ನ} - \frac{೬}{ಮ} - ೯ = ೦; \frac{೧೫}{ನ} + \frac{೪}{ಮ} = \frac{೧}{೩}.$

೩. $\frac{೧}{ಪ} + \frac{೧}{ಮ} = \frac{೧}{೮}; \frac{೬}{ಪ} - \frac{೮}{ಮ} = ೧\frac{೫}{೯}.$

೪. $\frac{೨}{೭ಯ} - \frac{೫}{೪ರ} = ೩\frac{೧}{೬}; \frac{೫}{೩ಯ} + \frac{೩}{ರ} = ೨೪\frac{೫}{೬}.$

೫. $\frac{೫}{೮ತ} - \frac{೨}{೩ವ} + \frac{೩}{೪} = ೦; \frac{೯}{೬ತ} + \frac{೧೧}{೯ವ} = ೧೨\frac{೧}{೨}.$

೬. ೫ಅ − ೯ಇ + ೯೦ಅಇ = ೦; $\frac{೨}{ಅ} + \frac{೧}{ಇ} = ೧.$

೭. ೧೧ಅಇ = ೯ಅ + ೧೬ಇ; $\frac{೧}{ಅ} - \frac{೧}{ಇ} = \frac{೧}{೬}.$

೮. ೨೪ಯ + ೧೮ರ − ಯರ = ೦; ೩ಯ + ೭ರ − ೨$\frac{೧}{೨}$ ಯರ = ೦.

೯. ೫ಲ + ೩ವ − ೧೬ಲವ = ೦; $\frac{೪}{ಲ} + \frac{೭}{ವ} + ೨೩ = ೦.$

೧೦. (೨ಕ − ೩)(೩ನ − ೪) = ೧೨ = $\frac{೪೫}{ಕ} + \frac{೪}{ನ}$

೧೧. $೫ರ - \frac{೨}{೩ವ} = ೧೦\frac{೧}{೯}$; $೮ರ + \frac{೧೨}{೫ಪ} = ೧೫\frac{೩}{೫}$.

೧೨. $೨ಕ್ಷ - ೩\frac{೩}{೫} = \frac{೬}{೫ಯ}$; $೧೦ಕ್ಷ = \frac{೯}{೪ಯ} + ೧೯\frac{೧}{೪}$

೧೩. $\frac{ಯ+ರ}{ಯರ} = \frac{೩}{೪}$, $\frac{ಯ-ರ}{ಯರ} = \frac{೧}{೪}$

೧೪. $\frac{೮}{ಅ} + \frac{೩}{ಕ} = ೦$; $೮ಅ + ೩ಕ = ೨೭\frac{೧}{೨}$.

೧೫. $\frac{೨೫}{ಪ} - \frac{೧೪}{ಮ} = \frac{೩ಪ+೭ಮ}{ಪಮ} + ೧\frac{೬}{೩೫}$; $೩೪ಪಮ = ೩೫(೭ಮ-೩ಪ)$.

೩.

೬೪. ಈಗ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಈ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೩ಯ-೨ರ} + \frac{೩}{೪ಯ+ರ} = ೧\frac{೧೧}{೨೦} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

$$\frac{೮}{೩ಯ-೨ರ} - \frac{೫}{೪ಯ+ರ} = ೧\frac{೧}{೨} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ೩ಯ − ೨ರ ಮತ್ತು ೪ಯ + ರ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಯ ಮತ್ತು ರ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೨೫}{೩ಯ-೨ರ} + \frac{೧೫}{೪ಯ+ರ} = ೭\frac{೩}{೪}$

(೨)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\frac{೨೪}{೩ಯ-೨ರ} - \frac{೧೫}{೪ಯ+ರ} = ೪\frac{೧}{೨}$

ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ $\frac{೪೯}{೩ಯ-೨ರ} = ೧೨\frac{೧}{೪} = \frac{೪೯}{೪}$.

$$\therefore ೩ಯ - ೨ರ = ೪ \qquad (೩)$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $೩ಯ - ೨ರ = ೪$ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,

$$\frac{೫}{೪} + \frac{೩}{೪ಯ + ರ} = ೧\frac{೭}{೧೨}$$

$$\therefore \frac{೩}{೪ಯ + ರ} = ೧\frac{೭}{೧೨} - ೧\frac{೧}{೪} = \frac{೧}{೩}$$

$$\therefore ೪ಯ + ರ = ೯. \qquad (೪)$$

(೪) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೮ಯ + ೨ರ = ೧೮$ (೫)

(೩) ಮತ್ತು (೫) ಇವುಗಳ ಜೋಡೀ- $೩ಯ - ೨ರ = ೪$

ಜನ್ನು ಮಾಡಿ $೮ಯ + ೨ರ = ೧೮$

$೧೧ಯ = ೨೨$, ಅಂ. $ಯ = ೨$.

(೩)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $ಯ=೨$ ಇಡಲಾಗಿ $೬ - ೨ರ = ೪$

$$\therefore -೨ರ = ೪ - ೬ = -೨ \text{ ಅಂ. } ರ = ೧.$$

$$ಯ = ೨;\ ರ = ೧.$$

ಉ. ೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\frac{೪}{೩ಯ - ೪ರ} - \frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ} = \frac{೭}{೧೦} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (೧)$$

$$\frac{೮}{೯ಯ - ೧೨ರ} + \frac{೧}{೬ಯ + ೧೫ರ} = \frac{೧}{೩೦} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{೮}{೩(೩ಯ - ೪ರ)} + \frac{೧}{೮(೨ಯ + ೫ರ)} = \frac{೧}{೩೦}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವ-ದೆಂಬುದು ಕಂಡು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ೧೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{೪೦}{೩ಯ - ೪ರ} + \frac{೩}{೨ಯ + ೫ರ} = \frac{೧}{೨} \quad (೩)$$ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುವದು.

ಈಗ $\frac{೧}{೩ಯ - ೪ರ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ}$ ಗಳಿಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ

ಮತ್ತು ಕ ಈ ಆದೇಶಗಳನ್ನಿಟ್ಟರೆ, (೧) ಮತ್ತು (೨) ಗಳ ಮೇಲಿಂದ

$$\text{೪ಅ} - \text{ಕ} = \frac{\text{೭}}{\text{೧೦}} \qquad (\text{೪})$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad \text{೪೦ಅ} + \text{೩ಕ} = \frac{\text{೧}}{\text{೨}} \qquad (\text{೫})$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

(೪)ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $\text{೧೨ಅ} - \text{೩ಕ} = \frac{\text{೨೧}}{\text{೧೦}}$

ಜೋಡಿಸನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $\text{೫೨ಅ} = \frac{\text{೨೬}}{\text{೧೦}} = \frac{\text{೧೩}}{\text{೫}}$, ∴ $\text{ಅ} = \frac{\text{೧}}{\text{೨೦}}$.

(೪) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $\text{ಅ} = \frac{\text{೧}}{\text{೨೦}}$ ಎಂದು

ಇಡಲಾಗಿ, $\frac{\text{೧}}{\text{೫}} - \text{ಕ} = \frac{\text{೭}}{\text{೧೦}}$, ∴ $\text{ಕ} = \frac{\text{೧}}{\text{೫}} - \frac{\text{೭}}{\text{೧೦}} = -\frac{\text{೫}}{\text{೧೦}} = -\frac{\text{೧}}{\text{೨}}$.

ಈಗ $\text{ಅ} = \frac{\text{೧}}{\text{೨೦}}$ ಅಂದರೆಯೇ $\frac{\text{೧}}{\text{೩ಯ} - \text{೪ರ}} = \frac{\text{೧}}{\text{೨೦}}$, ∴ $\text{೩ಯ} - \text{೪ರ} = \text{೨೦}$ (೬)

ಮತ್ತು $\text{ಕ} = -\frac{\text{೧}}{\text{೨}}$ ಅಂದರೆಯೇ $\frac{\text{೧}}{\text{೨ಯ} + \text{೫ರ}} = -\frac{\text{೧}}{\text{೨}}$, ∴ $\text{೨ಯ} + \text{೫ರ} = -\text{೨}$ .... (೭)

(೩)ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\text{೬ಯ} + \text{೧೫ರ} = -\text{೬}$

(೬)ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\text{೬ಯ} - \text{೮ರ} = \text{೪೦}$

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $\text{೨೩ರ} = -\text{೪೬}$

∴ $\text{ರ} = -\text{೨}$.

(೭) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $\text{ರ} = -\text{೨}$ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,

$\text{೨ಯ} - \text{೧೦} = -\text{೨}$, ∴ $\text{೨ಯ} = \text{೮}$. ∴ $\text{ಯ} = \text{೪}$.

$\text{ಯ} = \text{೪}$; $\text{ರ} = -\text{೨}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(೧) $\frac{\text{೫}}{\text{ಅ} - \text{ಇ}} + \frac{\text{೩}}{\text{ಅ} + \text{ಇ}} = \text{೪}\frac{\text{೨}}{\text{೩}}$; $\frac{\text{೬}}{\text{ಅ} - \text{ಇ}} - \frac{}{\text{ಅ} + \text{ಇ}} = \text{೧}$.

(೨) $\frac{\text{೮}}{\text{ಅ} - \text{ಇ}} + \frac{\text{೩}}{\text{ಅ} + \text{ಇ}} = \text{೧}\frac{\text{೩}}{\text{೧೦}}$; $\frac{\text{೯}}{\text{ಅ} - \text{ಇ}} - \frac{\text{೨}}{\text{ಅ} + \text{ಇ}} = \frac{\text{೧೭}}{\text{೩೦}}$.

(೩) $\frac{\text{೭}}{\text{ಪ} + \text{ಬ}} - \frac{\text{೩}}{\text{ಪ} - \text{ಬ}} + \frac{\text{೧}}{\text{೨೦}} = \text{೦}$;

$$\frac{೨}{ಪ+ಬ} - \frac{೮}{ಪ-ಬ} + ೩\frac{೪}{೫} = ೦.$$

(೪) $\frac{೨}{೫(ಯ+ರ)} - \frac{೩}{೨(ಯ-ರ)} + ೧\frac{೧೧}{೩೦} = ೦;$

$$\frac{೨}{೩(ಯ+ರ)} + \frac{೩}{೫(ಯ-ರ)} = \frac{೩೭}{೪೫}.$$

(೫) $\frac{೧}{೨(ರ-ವ)} + \frac{೨}{೯(ರ+ವ)} + \frac{೧೧}{೯೦} = ೦;$

$$\frac{೩}{೮(ರ-ವ)} - \frac{೨}{೫(ರ+ವ)} = \frac{೧೯}{೪೦}.$$

(೬) $\frac{೮}{(೩ಯ-ವ)} + \frac{೯}{೨(ಯ+ವ)} = ೨\frac{೧}{೧೨};\ \frac{೫(ಯ+ವ)}{೨(ಯ-ವ)} = ೭\frac{೧}{೨}.$

(೭) $\frac{೩}{೪(ರ+ಸ)} - \frac{೨}{೫(ರ-ಸ)} + \frac{೩}{೨೦} = ೦:$

$$\frac{೪ರ-೪ಸ}{೬ರ+೭ಸ} = \frac{೮}{೪೨}.$$

(೮) $\frac{೧}{೧-ಪ+ಮ} + \frac{೧}{೧-ಪ-ಮ} = ೧;$

$$\frac{೨}{ಪ-ಮ-೧} + \frac{೩}{ಪ+ಮ-೧} = ೧.$$

(೯) $\frac{೫}{೪ಯ-೩ವ} + \frac{೭}{೩ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೨}{೩};$

$$\frac{[illegible]}{೪ಯ-೩ವ} - \frac{[illegible]}{೩ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೧}{೭}.$$

(೧೦) $\frac{೮}{೨ಕ-೫ನ} + \frac{೩}{೪ಕ-ನ} = ೨\frac{೧೩}{೧೫};$

$$\frac{[illegible]}{೨ಕ-೫ನ} - \frac{[illegible]}{೪ಕ-ನ} = ೧\frac{೩}{೫}.$$

(೧೧) ೨೫/(ಅ+ಕ) + ೮/(೭ಅ+೩ಕ) = ೬ ೧೩/೨೦ ;

೫/(೭ಅ+೩ಕ) − ೩/(ಅ+ಕ) + ೧/೨ = ೦.

(೧೨) ೪/(೨ಅ+೩ಇ−೫) + ೩/(೩ಅ−ಇ+೨) + ೧/೬ = ೦;

೫/(೨ಅ+೩ಇ−೫) − ೨/(೩ಅ−ಇ+೨) + ೧ ೧/೬ = ೦.

೪.

೬·೫. ಉ. ೧. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ನಾಲ್ಮಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಎಕಂಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಪ ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯದು ಮ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦ಪ+ಮ. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಮಡಿಸಿ ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦ಪ+ಮ−೨, ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦ ಮ+ಪ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ೪೦ಪ+ಮ−೨ = ೩(೧೦ಪ+ಮ)

∴ ೪೦ಪ+ಮ−೨=೩೦ಪ+೩ಮ.

∴ ೧೦ಪ−೨ಮ = ೨

೨ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೫ಪ−ಮ = ೧ .... (೧)

ಮತ್ತು ೧೦ಮ + ಪ = ೩(೧೦ಪ+ಮ)+೫

∴ ೧೦ಮ+ಪ = ೩೦ಪ+೩ಮ+೫

∴ − ೨೯ಪ + ೭ಮ = ೫ .... (೨)

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ. ೩೫ಪ − ೭ಮ = ೭

ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, ೬ಪ = ೧೨, ಆ. ಪ = ೨.

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ=೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ, ೧೦ − ಮ = ೧, ಆ. ಮ = ೯.

∴ ೨೯ ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು.

ಉ.೨. ೩೦ ಸೇರು ಮತ್ತು ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇರುವ ಎರಡು ಪಾತ್ರೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರಿನಂತೆ ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಂತರ ಆ ಪಾತ್ರೆಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯು ಎಷ್ಟು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತಿರುಗಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೪ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು ?

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೪೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೩೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು, ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ $\frac{೩}{೪}$ ಹಾಲು ಮತ್ತು $\frac{೧}{೪}$ ನೀರು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೩೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇದ್ದು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ $\frac{೨}{೩}$ ಹಾಲು ಇದ್ದು $\frac{೧}{೩}$ ನೀರು ಇರುವದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿಯ ಪ ಸೇರು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ದ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ $\frac{೩}{೪}$ ಪ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು $\frac{೧}{೪}$ ಪ ಸೇರು ನೀರು, ಮತ್ತು ದ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ $\frac{೨}{೩}$ ದ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು $\frac{೧}{೩}$ ದ ಸೇರು ನೀರು, ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ

$\frac{೩}{೪}$ಪ + $\frac{೨}{೩}$ದ = ೧೦ .... (೧)

ಮತ್ತು $\frac{೧}{೪}$ಪ + $\frac{೧}{೩}$ದ = ೪ .... (೨)

(೨) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\frac{೧}{೨}$ಪ + $\frac{೨}{೩}$ದ = ೮ .... (೩)

(೧) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೩) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ,

$\frac{೧}{೪}$ಪ = ೨, ಆ. ಪ = ೮.

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೮ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

೨ + $\frac{೧}{೩}$ದ = ೪, ಅಂ. $\frac{೧}{೩}$ದ = ೨, ಆ. ದ = ೬.

೮ ಸೇರು; ೬ ಸೇರು.

ಉ ೩. ಒಂದು ಡೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೮ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಲು ಆರು ತಾಸುಗಳು, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೪೨ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ೩೦ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ; ಅದರೆ ಡೋಣಿಯ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ತಾಸಿಗೆ ಡೋಣಿಯ ಸ್ವಂತ ವೇಗವು ನ ಮೈಲುಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು ಪ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಡೋಣಿಯು ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ನ+ಪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ನ−ಪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವದು.

$$\therefore \frac{೨೮}{ನ+ಪ} + \frac{೨೪}{ನ-ಪ} = ೬ \quad \ldots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad \frac{೪೨}{ನ+ಪ} + \frac{೩೦}{ನ-ಪ} = ೮ \quad (೨)$$

$$\text{೨ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,} \quad \frac{೧೬೮}{ನ+ಪ} + \frac{೧೨೦}{ನ-ಪ} = ೩೨$$

$$\text{ಮತ್ತು (೧) ನೆಯದನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ} \quad \frac{೧೬೮}{ನ+ಪ} + \frac{೧೪೪}{ನ-ಪ} = ೩೬$$

$$\text{ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ} \quad \frac{೨೪}{ನ-ಪ} = ೪$$

$$\text{ಅಂ.} \; ನ-ಪ = ೬ \quad (೩)$$

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ನ−ಪ = ೬ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,

$$\frac{೨೮}{ನ+ಪ} + ೪ = ೬, \quad \text{ಅಂ.} \; \frac{೨೮}{ನ+ಪ} = ೨,$$

ಅಂ. ನ+ಪ=೧೪ .... (೪)

(೩) ಮತ್ತು (೪) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ೨ನ= ೨೦,

ಅಂ. ನ= ೧೦. ಮತ್ತು ನ+ಪ= ೧೪ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಪ=೪.

ಡೋಣಿಯ ವೇಗವು ೧೦ ಮೈಲು; ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು ೪ ಮೈಲು.

ಉ.೪. ೩೬ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಹೊರಟ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೨೭ ಮೈಲಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಕಾಲಿನಿಂದ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕೂವರಿ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಬಸ್ಸಿನ ವೇಗವು ಅವರ ಮೊದಲಿನ ವೇಗದ $\frac{೫}{೬}$ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನು ತಾನು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆದ ಅಂತರವನ್ನು ಕಾಲಿನ ವೇಗದ $\frac{೪}{೩}$ ಪಟ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ನಡೆದಿದ್ದರೆ ೪ ತಾ. ೩ ಮಿ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು, ಆದರೆ ಬಸ್ಸಿನ ಮತ್ತು ಅವನು ನಡೆಯುವ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ಬಸ್ಸಿನ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಬ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆಯುವುದು ಪ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ

$\frac{೨೭}{ಬ} + \frac{೯}{ಪ} = \frac{೯}{೨}$, ೯ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $\frac{೩}{ಬ} + \frac{೧}{ಪ} = \frac{೧}{೨}$ .... (೧)

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{೨೭}{\frac{೫}{೬}ಬ} + \frac{೯}{\frac{೪}{೩}ಪ} = ೪\frac{೩}{೬೦}$$

$$\therefore \frac{೨೭ \times ೬}{೫ಬ} + \frac{೯ \times ೩}{೪ಪ} = \frac{೮೧}{೨೦}$$

೨೭ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $\frac{೬}{೫ಬ} + \frac{೧}{೪ಪ} = \frac{೩}{೨೦}$

೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{೨೪}{ಬ} + \frac{೫}{ಪ} = ೩$ .... (೨)

(೧)ನೆಯದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ $\frac{೧೫}{ಬ} + \frac{೫}{ಪ} = \frac{೫}{೨}$ .... (೩)

(೨)ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (೩) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$\frac{೯}{ಬ} = \frac{೧}{೨}, \text{ ಅಂ. } ಬ = ೧೮.$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬ = ೧೮ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

$\frac{೩}{೧೮} + \frac{೧}{ಪ} = \frac{೧}{೨}$, ∴ $\frac{೧}{ಪ} = \frac{೧}{೨} - \frac{೧}{೬} = \frac{೧}{೩}$, ∴ ಪ = ೩.

ಬಸ್ಸಿನ ವೇಗವು ೧೮ ಮೈಲು; ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ೩ ಮೈಲು.

ಉ.೫. ಒಂದು ಧಾರ್ಮಿಕ ಸಮಾರಂಭದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೆರೆದ ವೈದಿಕರಿಗೆ ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ದಕ್ಷಿಣೆ ಎಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೬೦ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ೪೦ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಹಾಗಾದರೆ ವೈದಿಕರು ಎಷ್ಟಿದ್ದರು? ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ವೈದಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ ಇದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದ ರೂ. ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದರೆ ವದ ರೂ.ದಕ್ಷಿಣೆಯನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ,

(ವ+೬೦)(ದ−೫) = ದವ .... (೧)

ಮತ್ತು (ವ−೪೦)(ದ+೫) = ದವ .... (೨)

ಒಂದನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ದವ+೬೦ದ−೫ವ−೩೦೦ = ದವ.

∴ ೬೦ದ−೫ವ = ೩೦೦ .... (೩)

ಮತ್ತು (೨) ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ದವ−೪೦ದ+೫ವ−೨೦೦ = ದವ

∴ −೪೦ದ+೫ವ ೨೦೦ .... (೪)

(೩) ಮತ್ತು (೪) ಕೂಡಿಸಿದರೆ ೨೦ದ=೫೦೦, ∴, ದ = ೨೫.

೪ನೆಯದರಲ್ಲಿ ದ = ೨೫ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,

−೧೦೦೦+೫ವ = ೨೦೦, ∴. ೫ವ = ೧೨೦೦, ∴. ವ = ೨೪೦.

ವೈದಿಕರು, ೨೪೦; ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದಕ್ಷಿಣೆಯು ೨೫ ರೂ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೫

೧. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೭ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ

ಜೋಡಿಯ ಆ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಆರು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨. ಬಾಳಪ್ಪನಾಯಿಕರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವನ್ನು ೩½ ದರದ ಸರಕಾರಿ ಸಾಲಿನ ಶೇರುಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೪½ ದರದ ಮುನಸಿಪಾಲಿಟಿಯ ಸಾಲಿನ ಶೇರುಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ೨೦೮೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡದೇ ಅವರು ತಮ್ಮ ಹಣವನ್ನು ಎರಡೂ ಶೇರುಪತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದರೆ, ಅವರ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯ ಉತ್ಪನ್ನವು ೯೦ ರೂ. ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು, ಮತ್ತು ಅವರು ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟಿಟ್ಟಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ೩ ರೂ. ಗೆ ಒಂದರಂತೆ ೨೦೦ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕಾಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನೊಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು, ಮತ್ತು ಆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ರಂತೆ ಲಾಭವಾಯಿತು. ಅವನು ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನೊಳಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೪ ಆ. ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದ್ದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ೪ ಆ. ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಆದ ಲಾಭಕ್ಕಿಂತ ೧೦ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಲಾಭವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಸಿಗಳಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ರಾಮರಾಯರು ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಗಾಡಿಯನ್ನು ಕೆಲವು ಹಣಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು. ಕುದುರೆಗೆ ನೂ. ೧೫ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಗೆ ನೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಹಣವು ಖರ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು.

ತ್ತದರೆ ಕುದುರೆಯು ನೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಗೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ನೂ. ೧೫ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ, ಒಟ್ಟು ಹಣದಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಿದ್ದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕುದುರೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

೫. ಒಂದು ದೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೩೦ ಮೈಲು-ಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಹಿಂದೆ ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ೩೦ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೭ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ದೋಣಿ, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

೬. ಭೀಮಪ್ಪ ಬಡಿಗನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ೫೭ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೋ ಅಷ್ಟೇ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಮಪ್ಪ ಗವಂಡಿಯು ೪೦ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ೬೫ ರೂ. ಗಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಭೀಮಪ್ಪನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಅವು-ಗಳಿಗಿಂತ ಎರಡು ಹೆಚ್ಚು ದಿನಗಳು ರಾಮಪ್ಪನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರ ದಿನಗೂಲಿಯ ದರವೆಷ್ಟು ?

೭. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೯ ಇದ್ದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೯೯ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ತಿರುವುಮುರುವಾಗುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೮. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಪೇಟೆಗೆ ಹೋದನು. ಅಗ್ಗ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ಒಂದು ಆಣೆಯಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಇಳಿದ ಮೂಲಕ ಅವನಿಗೆ ೮ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕಿತು. ದರವು ಒಂದು ಆಣೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೭ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣದ ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೯. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಸಭಾಗೃಹದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೩ ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

೩೬೦ ಚೌ. ಫು. ಗಳಿಂದ, ಮತ್ತು ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೭೫ ಚೌ. ಫೂ-ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ?

೧೦. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ೧೦ನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರನ್ನು ಎರಡನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಮೊದ-ಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದರ ೩ರಷ್ಟು ಹುಡುಗರಾಗುವವು, ಆದರೆ ಎರಡನೆ-ಯದರಲ್ಲಿಯ ೨ ಹುಡುಗರನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಎರಡರ-ಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವವು, ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರಿರುವರು ?

೧೧. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಆರು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಐದು ಪಟ್ಟು ಆಗುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೨. ಮಾವಿನಹಣ್ಣಿನ ದರವು ಡಝನ್ನಿಗೆ ೮ಆ. ಇಳಿದ ಮೇಲೆ ಹೋದವಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಣಕ್ಕೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಅದರ ಹಿಂದಿನವಾರದಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕ ಹಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ೩ ಡಝನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕಿವು, ಮತ್ತು ಈ ವಾರದಲ್ಲಿ ದರವು ಮತ್ತೂ ೮ಆ. ಇಳಿದದ್ದರಿಂದ ಅಷ್ಟೇ ಹಣದಲ್ಲಿ ಹೋದ ವಾರದಗಿಂತ ಒಂದು ಡಝನ್ ಹಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕವು ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣದ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗಿಂತ ೮ ಹೆಚ್ಚು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿದ್ದವು. ಅವನು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೩ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ದರದಿಂದ ಮಾರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ ನಂತರ ಎರಡೂ ತರದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಇದ್ದುದು ಅವನಿಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅವನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮೋಸಂಬೀ ಹಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ

ಮಾರಿದ್ದರೆ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಮೋಸಂಬಿಗಳ ಬೆಲೆಗಿಂತ ೩| ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಎಷ್ಟಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಮಾರಿದನು?

೧೪. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಣ್ಣಪ್ಪನ ವಯಸ್ಸು ವಸಂತನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು, ಐದು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಅವನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇಂದಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಗಂಡಹೆಂಡತಿಯರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡು ಅವರ ಮಕ್ಕಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿನ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿನ ನಾಲ್ಮಡಿಯಿತ್ತು, ಮತ್ತು ೬ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೭ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಮಕ್ಕಳೆಷ್ಟು?

೧೬. ರಾಮು, ವಿಠ್ಠಲ, ಗೋವಿಂದ ಈ ಮೂವರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಗೆ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ರಾಮನ ನಡಿಗೆಯು ಸರಾಸರಿ ವೇಗದಂತೆ ವಿಠ್ಠಲನ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನದು ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಿಠ್ಠಲನು ರಾಮನ ನಂತರ ೪೫ ಮಿ. ತಡವಾಗಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ರಾಮನಿಗಿಂತ ೩೫ ಮಿ. ಮೊದಲು ಮುಟ್ಟುತ್ತಾನೆ; ಆದರೆ ಆ ಊರು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅವರ ನಡಿಗೆಯು ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಬ್ಬ ಗಡಿಯಾರ ಮಾರುವವನು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ನೂ. ೭೫ ಲಾಭವಂತೆ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ನೂ. ೧೫ ಲಾಭವಾತ್ತೆ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗಡಿಯಾರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ೪೭೬ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಮೊದಲನೆಯ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ನೂ. ೧೫ ಲಾಭದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಹಾನಿ ಹಚ್ಚಿ ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ

ಲಾಭವೂ ಆಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಹಾನಿಯಾದರೂ ಆಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆ ಗಡಿಯಾರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

೧೮. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅದೇ ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨ ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಬೇರಿಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೩ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೧೯. ಒಬ್ಬ ಬಣ್ಣಗಾರನು ಒಂದು ಬಣ್ಣದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಅದು ಕೆಲವಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುವದೆಂದು ಅಂದಾಜಿನಿಂದ, ಕೆಲವು ರಕಮಿಗೆ ಮಾಡಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡನು, ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ೫ ದಿನಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ದಿನಕ್ಕೆ ೧ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ೪ ದಿನಗಳು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ದಿನಕ್ಕೆ ೧। ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾದವು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಸಿಕ್ಕಿತು ?

೨೦. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಿಂದ ೮೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ೮೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೭ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ೧೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಅಂತರದಿಂದ ೨೪ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೨೧. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ೪:೧ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ಎಷ್ಟು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಹಾಲು ೨೨ ಸೇರು ಮತ್ತು ನೀರು ೭ ಸೇರು ಆಗುವದು ?

೨೨. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬಂದು ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುವದು. ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೩೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಅದಲು-ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೩೩. ಕೆಲವಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಗದೊಳಗಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ೫ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೪ ಆಣೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ೩ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೨ ಆಣೆಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತು, ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರು?

೩೪. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಛೇದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಛೇದದೊಳಗಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ೩ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಶ ಹಾಗೂ ಛೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೩ ಕಳೆದರೆ ಅದು ೨ ಆಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೩೫. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ರತ್ತಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ೨೦ ರತ್ತಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ರತ್ತಲಿಗೆ ೨| ರೂ. ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಚಹವನ್ನೂ ಮತ್ತು ರತ್ತಲಿಗೆ ೨|| ರೂ. ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೨ ರೂ. ೭ ಆ.ಗೆ ರತ್ತಲಿನಂತೆ ಮಾರಿ ೧೧ ರೂ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ೨|| ರೂ.ದರದ ಚಹವನ್ನು ೨| ರೂ.ದರದ ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ೨| ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ೨|| ರೂ.ದರದ ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ್ದರೆ ಲಾಭವು ಒಂದು ರೂ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪ್ರಕಾರದ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಚಹವಿತ್ತು?

೩೬. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಿಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂರ್ಪಟ್ಟಿಯಿರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೩೭. ರಾಮರಾಯನು ತನ್ನ ಕಿಸೆಯಲ್ಲಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕೃಷ್ಣರಾಯನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ಕೃಷ್ಣರಾಯನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೧೫೫ ರೂ. ಗಳು ಆಗುವವು,

ಕೊಟ್ಟರೆ ರಾಮರಾಯನ ಹತ್ತಿರ ೧೫೫ ರೂ. ಆಗುವವು. [illegible]
ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು?

೩೮. ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ೧೨ ಮೈಲು ಇದ್ದು ಅವರಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ದಾರಿಯು ಸಪಾಟವಾಗಿ, ಕೆಲವಷ್ಟು ಏರಿಕೆಯು ಮತ್ತು

ಕೆಲವಷ್ಟು ಇಳುಕಲದಿರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂತರವನ್ನು ೪ ತಾಸು ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೫ ಮಿ. ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅವನ ಏರಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ, ಸಪಾಟ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಇಳುಕಲಿನಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಸರಾಸರಿ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩ಮೈ; ೩ಮೈ; ಮತ್ತು ೪ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ದಾರಿಯು ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ಸಪಾಟವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೯. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆದು ನೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಹೋದನು. ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ತಾಸಿದ್ದು ತಿರುಗಿ ಮನೆಗೆ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಲವಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ಸಾಯಕಲ್ ಮೇಲಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಮೊದಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬಂದನು. ಮನೆಗೆ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ೯ ಹೊಡೆದು ೩೪ ಮಿ. ಗಳಾದದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿತು, ಅವನ ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ವೇಗವು ೮ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ ಅವನು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೪೦ ಮಿ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮನೆಗೆ ತಿರುಗಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಅವನ ಮನೆಯಿಂದ ಆ ಊರಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

೩೦. ಬಲಗಡೆಯ ಅಂಕೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕೆ ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಅಂಕೆ ಇವುಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೮೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕೆಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಡುವಿನ ಅಂಕೆ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಅಂಕೆ ಇವುಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೫೪ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

೩೧. ವಿಧಿ ಮಂಡಲದ ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತದಾರ ಸಂಘದ ಒಂದು ಜಾಗೆಗಾಗಿ ಇಬ್ಬರು ಉಮೇದವಾರರು ನಿಂತಿದ್ದರು. ಆರಿಸಿ ಬಂದ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ದೊರೆತ ಮತಗಳಲ್ಲಿ ೩೪೮೦ ಮತಗಳು ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ಬಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನು ೧೫೨ ಮತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಪಡೆದು ಆರಿಸಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಮತದಾನದಲ್ಲಿಯ ೧೯

ಮತಗಳು ಆಗ ದೊರೆತ ಮತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆತಿದ್ದರೆ, ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಸಮಾನ ಮತಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದುವು, ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮತಗಳು ದೊರೆತುವು ?

೩೨. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡೂ ೨ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ⅓ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ½ ಆಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

೩೩. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಿಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿಂದ ೯ ಕಳೆದರೆ ಅದರ ಅಂಕಿಗಳು ಅದಲು ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೩೪. ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೨⅔ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಅದಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೩ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಂತೆಯೇ ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಣಗಳುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಶಿಕ್ಷಣ ಖಾತೆಯು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟ ಇಲ್ಲವೆ ಎಸ್. ಎಸ್. ಸಿ, ಪರೀಕ್ಷಾ ಮಂಡಲವು ನೇಮಿಸಿದ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾವೇಶವನ್ನು ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಆದಕಾರಣ ಅವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಏಳನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

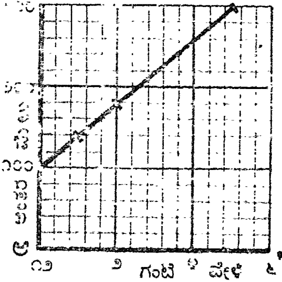
ಆಲೇಖ

೧.

೭೧. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿರಲು ಆಲೇಖದ (Graph) ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಜ್ಞಾನವು ನಮಗೆ ಆಗಿರುವದು. ಆರನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ್ಗೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಉಪಸ್ಥಿತಿ, ಗುಣ, ಮೂಲೋದ್ಯೋಗ, ಬೆಳೆಗಳು, ಜನ್ಮ ಮುಂತಾದವುಗಳಬಗ್ಗೆ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ವಸ್ತುಗಳ ವಾರದಲ್ಲಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ತಿಂಗಳಿನ ದಿನಗಳು, ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಆಲೇಖ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಂಡಿಸುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತೆವು. ಮುಂದೆ ಏಳನೆ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಹುಡುಗರ ಎತ್ತರಕತ್ತೆ ಮತ್ತು ತೂಕ, ಮೂಲೋದ್ಯೋಗಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರಗತಿಯು, ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮುಂತಾ-ದವುಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ **ರೇಖಾಲೇಖಗಳನ್ನು** ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಇಂಚು ಮತ್ತು ಸೆಂಟಿಮಿಟರ, ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಪೌಂಡುಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಡಾಲರುಗಳು . ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ ವಿಷಯದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು. ಹೋದವರ್ಷ ಒಂಬತ್ತನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಸದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾ-ಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ಓದುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿಯೇ ಈಗ ನಾವು ಮುಂದಿನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸೋಣ, ಮತ್ತು ಆಲೇಖದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಗಳಿಸೋಣ.

೭೨. ನಮ್ಮ ಊರ ಹತ್ತರ ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯ ದಾರಿಯು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದು ದಿನಾಲು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ಬರುವ ಒಂದು ಉಗಿ-ಬಂಡಿಯು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬಂದು

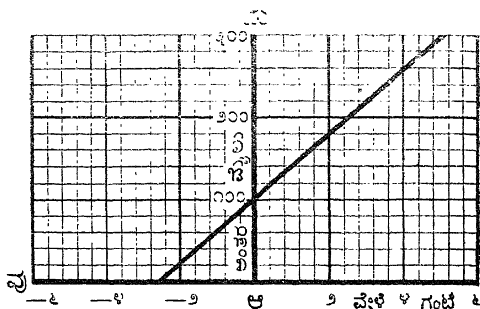
ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಾಹ್ನದಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಆ ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಡುವ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಯಾವಾಗಾದರೂ, ಅದು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ಅವಧಿಯನ್ನು ಅಡ್ಡಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಉದ್ದಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಸರಿಯಾಗಿ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಗೆ ಆ ಗಾಡಿಯು ೧೦೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ, ಒಂದು ಗಂಟೆಗೆ ೧೪೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ೨ ಗಂಟೆಗೆ ೧೮೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಮತ್ತು ೫ ಗಂಟೆಗೆ ೩೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ನಾವು ಈ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ಎಲ್ಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗೆ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧.

ಈಗ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಲ್ಲಿರುವದು, ನಮ್ಮ ಊರಿನ ಮೇಲಿಂದ ಅದು ಯಾವಾಗ ಹೋಗುವದು ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳು ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದು? ಇಲ್ಲಿ ಆವ ಈ ರೇಷೆಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವದ ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ

ಏನು ಮಾಡುವದು? ಧನ-ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೧. ಪ್ರ. ೬.) ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ್ಗೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಇದು ಆರಂಭ-ಸ್ಥಾನವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವ ಈ ರೇಷೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಿದರೆ (ಪೂರ್ವದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಅದು ಬಲಬದಿಗೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ

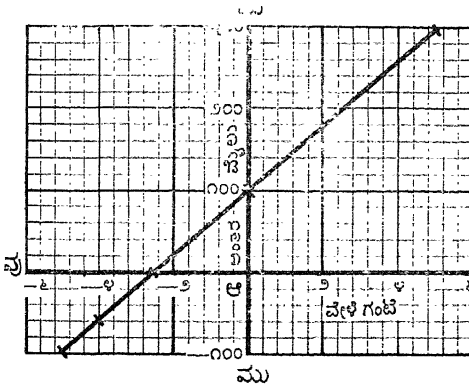


ಕ್ರ. ೨.

ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವ-ದಲ್ಲಿಯ ವೇಳೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯದ ಸಂಕೇತದಂತೆ, ಎಡಬದಿಗೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ೧ ತಾಸು ಮೊದಲು (೧೧ ಗಂಟೆಗೆ) ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೬೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ತಾಸುಗಳ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ (೧೦ ಗಂಟೆಗೆ) ೨೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದು, ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಆಲೇಖವು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಇರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗಿಂತ ೨॥ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ೯॥ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬಂದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಸಮಯದಿಂದ ಅದು ಯಾವಾಗ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗಾಡಿಯು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊತ್ತು ಮೊದಲೇ ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಹೊರಟಿದೆ. ಅದು ೯॥ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿತ್ತು. ಆದರ

ಈ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮಣವು ಸಹ ನಮಗೆ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವದಿಷ್ಟರ ಏನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು ? ಅದು ಈ ರೇಷೆಯು ನಮ್ಮ ಆಲೇಖ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಂದಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಿಂದಿನ (ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ) ಅಂತರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಬೇಕಾದ್ದರೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆರೇಷೆಯನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಮುಂದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಬೆಳೆಸಬೇಕಾಗುವದು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ದ ಮೇಲ್ಬದಿಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಹೇಗೆ ಧನವಿರುವವೋ ಅದರಂತೆ ಕೆಳಗಡೆಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಋಣ ವಿರುವವು. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೮ ಗಂಟೆಗೆ (೪ ತಾಸು ಮೊದಲು) ಗಾಡಿಯು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೬೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ೭ ಗಂಟೆಗೆ (೫ ತಾಸು ಮೊದಲು) ೧೦೦ ಮೈ. ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಆಲೇಖದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗವನ್ನೂ ಸಹ ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೩.

ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಹೊರಡುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಕೆಳಗಡೆ ೧೦೦ ಮೈಲು ಇದ್ದು ಅದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರತಿದಿನ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು

ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ೨೦೦ ಮೈಲುಗಳಷ್ಟು ಮುಕ್ಕಾಮಿನ ಊರಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಆ ರೇಖೆಯು ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಹೊರಟಾಗಿನಿಂದ ಮುಕ್ಕಾಮಿನ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟುವ ತನಕ ಅದರ ಪ್ರವಾಸದ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲವೆ ತರುವಾಯವಾಗಲಿ ಯಾವಾಗ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ **ವ್ರಅವ** ಮತ್ತು **ಮುಅಮು** ಈ ರೇಷೆಗಳು ಆಲೇಖವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಆಲೇಖವು ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಅದು ಎರಡನೇ ಭಾಗದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲವೆ ತರುವಾಯ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಯಾವಾಗ್ಗೆ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುವ **ಸೂತ್ರ**ವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ಕಾಲ (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) **ವ** ಈ ಪದದಿಂದ ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ಕಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವನ್ನು (ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ) **ಮು** ಈ ಪದದಿಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ, ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ಕಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ಇರುವದರಿಂದ **ಮು**=೧೦೦+೪೦ **ವ** ಈ ಸೂತ್ರವು ಗಾಡಿಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಗಾಡಿಯು ಬಂದಾಗ **ಮು** = ೦, ಆದುದರಿಂದ ೧೦೦+೪೦ **ವ**=೦, ಅಂ. ೪೦ **ವ** = —೧೦೦ ಅಂ. **ವ**= —೨½ ಅಂ. ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ೨½ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೯½ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಹೊರಡುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ—೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಗಾಡಿಯು ಹೊರಡುವ ಸಮಯದಲಿ

ಮ = ೧೦೦, ಆದುದರಿಂದ—೧೦೦=೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ ವ= —೨೦೦, ಅಂ. ವ = —೫.

∴ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ೫ ತಾಸು, ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಡುತ್ತದೆ.

ಅದರಂತೆಯೇ ಗಾಡಿಯು ಕೊನೆಯ ಮುಕ್ಕಾಮದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುವಾಗ ಮ = ೩೦೦, ∴ ೩೦೦, = ೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ ವ=೨೦೦, ಅಂ. ವ=೫ ∴ ಗಾಡಿಯು ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಮುಕ್ಕಾಮದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ.

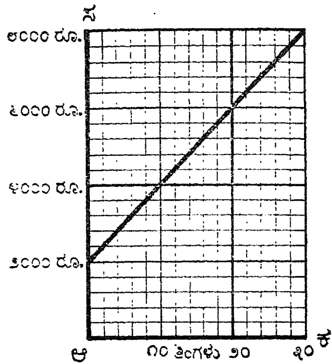
ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದಿಂದಿರುವ ಅಂತರ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ೩ ನೇ ನಂಬರದ ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸೂತ್ರವೂ ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಇದು ಆ **ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣ**ವಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ **ಆಲೇಖವು** ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ **ಆಲೇಖ**ವಿರುತ್ತದೆ.

೭೩. ಈಗ ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

೩೦ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲು ತಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಗಿಸಿ ಸ್ವತಃ ಗಳಿಸಲಿಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿದನಂತರ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ತನ್ನ ಆದಾಯದೊಳಗಿಂದ ೨೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಇಡುವದೆಂದು ವಸಂತ ರಾಯರು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರು. ಮತ್ತು ಅದರಂತೆ ಅವರು ನಿಯಮಿತ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದಿರುವರು. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಆ ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ತಾನು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸಲು ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೦೦ ರೂ ಉಳಿತಾಯವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಉಳಿತಾಯದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

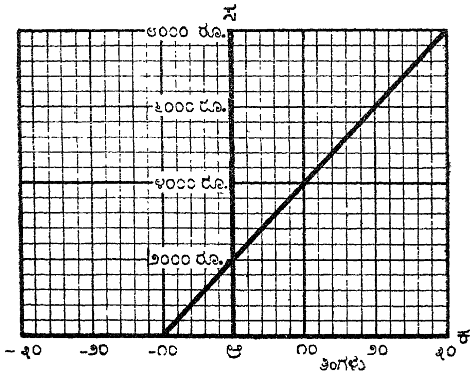
ಮುಂದಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಆಕ ಈ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯು ಈ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆಸ ಈ ಉದ್ದರೇಷೆಯು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆಲೇಖವು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು

ಶಿಲುಕಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಈ ಮೊದಲೇ ಯಾವಾಗ ಎಷ್ಟು ಶಿಲಕಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಅದು ಹೇಳುವದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಆಕ ಈ ರೇಷೆಯನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳಿಸಬೇಕಾಗುವದು, ತರುವಾಯ ಆಲೇಖವು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೪.

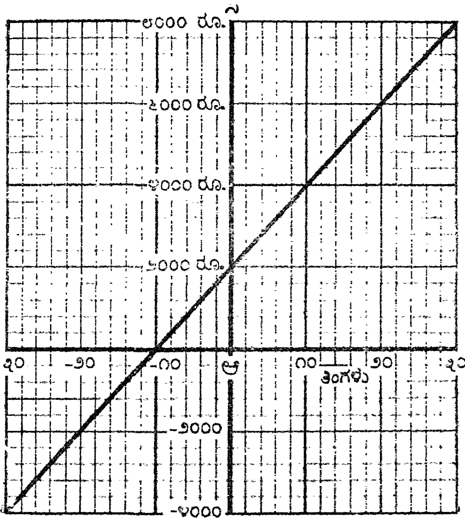
ಈ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ (ಕ್ರ. ೫) ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ ವಸಂತರಾಯರು ಪ್ರಾರಂಭದಿಂದ ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೨೦೦ ರೂ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೫

ತೆಗೆದಿಟ್ಟರೂ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕಳೆದ ೧೦ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಹಣವು ಕೂಡಹತ್ತಿತು. ಆ ಮೊದಲಿನ ತಲುಕು ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಸಾಲವು ೨೦೦ ರೂ.ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಲಿದೆ. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸಲಾರದೇ? ಅಥ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದು ಆ ಲೇಖವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಆ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ (ಕ್ರ.೬) ನಮಗೇನು ಕಾಣುಬರುತ್ತದೆ?

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅವರಿಗೆ ೪೦೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಿತ್ತು. (**ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ**—೪೦೦೦ ರೂ.). ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅದು



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೬.

೨೦೦ ರೂ.ಗಳಂತೆ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗಿ ೧೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ನಿಃಶೇಷವಾಯಿತು, ಅಂದರೆ ಅವರು ಋಣಮುಕ್ತರಾದರು. (**ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ**, ೦ ರೂ.). ಇಂದು **ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ**, + ೨೦೦೦ ರೂ. ಇನ್ನೂ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ **ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ** = (೨೦೦೦ + ೩೦ × ೨೦೦) ರೂ. = ೮೦೦೦ ರೂ. ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗಿರುವ ಅವಧಿಯು ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತ-ಪಡಿಸುವದಿದ್ದರೆ, ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗುವ ಅವಧಿ (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ-ವಾಗಿ **ಸ** ಮತ್ತು ಕ ಈ ವರ್ಣಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೨೦೦ ರೂ. ಶಿಲ್ಕು ಇಡುವದರಿಂದ, **ಸ** = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ **ಕ** ಎಂದು ಆ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು.

ಕ = ೦ ಇದ್ದಾಗ **ಸ** = ೨೦೦೦. ಅಂದರೆ ಇಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೨೦೦೦ ರೂ.

ಕ = ೩೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೬೦೦೦ = ೮೦೦೦, ಅಂದರೆ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ತರುವಾಯ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೮೦೦೦ ರೂ. **ಕ** = −೩೦ ಇದ್ದಾಗ **ಸ** = ೨೦೦೦ − ೬೦೦೦ = −೪೦೦೦, ಅಂದರೆ ಸರಿಯಾಗಿ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು −೪೦೦೦ ರೂ. ಅಂದರೆಯೇ ಸಾಲ **೪೦೦೦ ರೂ.**

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟ-ವಾಗುವವು. ಕ್ರ. ೬ನೇ ಆ ಲೇಖವು ಯಾವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತ-ದೆಯೋ ಅವೇ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು **ಸ** = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣ-ವಾದರೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ. **ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ** ಇದು ಆ ಆಲೇಖದ **ಸಮೀಕರಣ**ವಿದ್ದು ಅದು ಈ **ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ**ವೆಂದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗುವದಿಲ್ಲವೇ?

೨.

೭·೪. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದೆವೋ, ಓದಿದೆವೋ ಮತ್ತು ನೋಡಿದೆವೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಋಣ

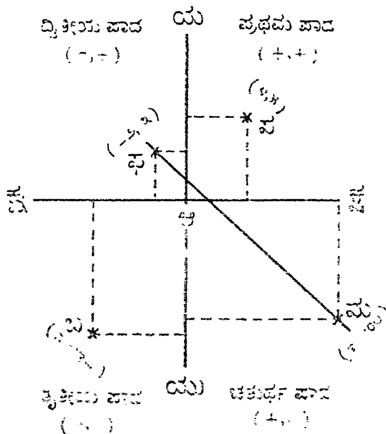
ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದಿಲ್ಲ. ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಇರುವ ಎರಡೂ ರೇಷೆಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೊನೆಗೆ ತೆಗೆದೆವೋ (ಕ್ರ. ೩ ಮತ್ತು ಕ್ರ. ೬) ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವಾದರೂ ಬಂದಿರುವದು, ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಛೇದಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದ ಎಡಬದಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಬದಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಪಾದ** (Quadront) ವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ (ಕ್ರ. ೭) ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ್ರಥಮಪಾದ, ದ್ವಿತೀಯಪಾದ, ತೃತೀಯಪಾದ** ಮತ್ತು **ಚತುರ್ಥಪಾದ**ಗಳೆಂದು ಸಂಬೋಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ

ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಮೊದಲು ಆಲೇಖ ವಿಷಯದ ಸ್ವಲ್ಪ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ. **ಆಲೇಖವನ್ನು** ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದಾಗ ನಾವು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಅನುಕೂಲ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ, ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಉದ್ದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸರಳರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು ಇಲ್ಲವೆ **ಅಕ್ಷ**ಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು, ಅಡ್ಡ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ Horizontal) ಗೆರೆಗೆ **ಭುಜಾಕ್ಷ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಉದ್ದ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ Vertical)ಗೆರೆಗೆ **ಕೋಟ್ಯಕ್ಷ**ವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದದಬಿಂದುವಿಗೆ **ಆರಂಭಸ್ಥಾನ** ಇಲ್ಲವೆ **ಪ್ರಸ್ಥಾನ**ಬಿಂದು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ **ಆ** ಇದು **ಆರಂಭಸ್ಥಾನ**ವಿದ್ದು **ಕ್ಷಆಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯಆಯ** ಇವು **ಅಕ್ಷ**ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯದು **ಭುಜಾಕ್ಷ**ವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು **ಕೋಟ್ಯಕ್ಷ**ವಿರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಹೆಸರುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಕ್ಷ**—ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು **ಯ**—ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಸಹ ನಾವು ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಪ್ರಧಾನಯಾಮ್ಯೋತ್ತರ ವೃತ್ತದಿಂದ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ವಿಷುವವೃತ್ತದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿದಾಗ್ಗ್ಯೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಅದರ ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕೋಟ್ಯಕ್ಷದಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎಡಗಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದೆಂಬುದು ತಿಳಿದರೆ ಆಲೇಖಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದು. ಹಾಗೆಯೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಎಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೋ, ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದಿರುವ ಅದರ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಕೇತದಿಂದ ನಾವು ಬಲಗಡೆಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವುಗಳನ್ನು ಋಣ (—); ಮತ್ತು ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಧನ (+), ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಋಣ (—) ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ **ಭುಜಾಂತರ** ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ **ಭುಜ**ವೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದಿರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ **ಕೋಟ್ಯಂತರ** ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ **ಕೋಟಿ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವಂತೆ ಅಳೆಯಲ್ಪಡುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕೆ **ಭುಜಾಂತರ** ಇಲ್ಲವೆ **ಭುಜ** ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ **ಕೋಟ್ಯಂತರ** ಇಲ್ಲವೆ **ಕೋಟಿ** ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದ ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ, ಬಲಗಡೆಯ ಭುಜಾಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವು ಋಣ (—); ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಕೋಟ್ಯಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನವು ಋಣ (—) ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದಿರುವ ಅಂತರಗಳಿಗೆ **ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ**ಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವಾಗ ಭುಜಾಂತರವನ್ನು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು ತರುವಾಯ ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತಾರೆ. ಭುಜ (ಅಡ್ಡಿರುವ ಅಂತರ), ಕೋಟಿ (ಉದ್ದಿರುವ ಅಂತರ). ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಸಹ-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕಂಸದಲ್ಲಿ ನಡುವೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿರಾಮ ಚಿಹ್ನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨.

ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಈ ಅಂತರಗಳು ೪ ಮತ್ತು ೫ ಮಾನಗಳು (Units) ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ನಾವು (೪, ೫) ಎಂದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಫ (—೨. ೩) ಇದರ ಅರ್ಥವು ಫ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ −೨ ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೋಟಿಯು ೩ ಮಾನಗಳಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೦.೧" ಈ ಮಾನವನ್ನು (Unit) ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಯಾವುದರ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಗೆ **ಬಿಂದುಸ್ಥಾಪನ** ಇಲ್ಲವೆ

ಸ್ಥಾಪನ ಮಾಡುವದು (Plotting the point) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಮಾನ Unit ಈ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಏಕಾಂಕ ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.)

ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (೪,೫),(—೨,೩), (—೬,—೮), (೧೦,—೭), ಇರುವವೋ ಇಂಥ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದು ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ, ಫ, ಬ** ಮತ್ತು **ಮ** ಈ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. **ಫ, ಮ,** ಇವು (೨,೩),(೧೦, —೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಷೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಗೊಟ್ಟು ನೋಡಿದರೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಮೊದಲನೇ **ಪಾದದಲ್ಲಿ** ಎರಡೂ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಧನ (+, +) ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ, ಋಣ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಧನ (—, +) ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಋಣ (—, —). ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ ಧನ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಋಣ (+, —) ಇರುವವು.

ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ನೀವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಷೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಮತ್ತು ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧–೩ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಚೌಕೋನಗಳು ಎಳೆದಿರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಚೌಕೋನಗಳ ಕಾಗದವೇ ಬೇಕು, ಇಲ್ಲವಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಬರಲಾರದು, ಅಥವಾ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರಲಾರದೆಂದಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಚೌಕೋನಗಳಿಲ್ಲದ ಸಾದಾ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಅನುಕೂಲತೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇರುವದು. ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವದಲ್ಲದೆ ಅದನ್ನು ಬೇಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗಿರುವದು. ಮೊದಲು ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಭುಜಾಂತರವನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಳೆಯಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಕೋಟ್ಯಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು

ಅಳೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವದೋ ಅದೇ ನಮಗೆ ಬಿಗಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಂದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

[ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾನವು (Unit) ಯಾವುದು ತಗೆದು-ಕೊಂಡಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಮರೆಯಬೇಡಿರಿ.]

೧. ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೨, ೬); (೩,೮); (—೫,೩); (—೬, —೪); (೩,—೭); (—೪, —೧); (೫,—೮); (—೬,೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

೨. (—೧, —೯), (೦, —೫), (೧,—೧), (೨,೩), (೩,೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. (—೮,೪), (—೩,೪), (೦,೪), (೪,೪) (೭,೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಷೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಷೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವೇನು ?

೪. (—೫,೫), (೫,೭), (—೫,೦) (—೫, ४), (—೫,೬), ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಷೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವು ಯಾವುದು ?

೫. (೨,—೫), (೪,—೧೦), (೬, —೧೫), (—೨,೫), (—೪,೧೦), (—೬,೧೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಷೆಯ ವಿಶೇಷ ಗುಣವು ಯಾವುದು?

೬. (೨,೪), (—೯, —೫), (೧೦, —೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿ-ಸುವ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೭. (—೪,೭), (—೬,೬), (೭,—೮), (೮,೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಚತುಷ್ಕೋಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩.

೭·೫. ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹಿಂದೆ ನೋಡೋಣ. ಪ. ೭·೩ರಲ್ಲಿಯ ಗಾಡಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ನಮ್ಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಗಾಡಿಯ ಅಂತರ

(ಮ) ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆಯು (ವ) ಇವು ಒಂದರ-ಮೇಲೊಂದು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ-ವನ್ನು **ಮ** = ೧೦೦ + ೪೦**ವ** ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ **ಮ** ದ ಬೆಲೆಯೆಂದರೆ ೧೦೦ + ೪೦**ವ** ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ **ವ** ದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರು-ತ್ತದೆ. **ವ** ದ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೇಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗಾಗೆ ೧೦೦ + ೪೦**ವ** ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆಯೇ **ಮ** ದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ವ=	−೫	−೪	−೩	−೨	−೧	೦	೧
ಮ ೧೦೦ + ೪೦**ವ**=	−೧೦೦	−೬೦	−೨೦	೨೦	೬೦	೧೦೦	೧೪೦
ವ=	೨	೩	೪	೫			
ಮ=೧೦೦ + ೪೦**ವ**=	೧೮೦	೨೨೦	೨೬೦	೩೦೦			

ಇಲ್ಲಿ **ವ** ದ ಬೆಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ೧೦೦ + ೪೦ **ವ** ಈ ರಾಶಿಯದಾದರೂ ಅಂದರೆ **ಮ** ದ ಬೆಲೆಯೂ ಸಹ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ **ವ** ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ೧೦೦ + ೪೦ **ವ** ದ ಅಂ. **ಮ** ದ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬೆಲೆಯಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ **ವ** ದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಇರುವಾಗ ಯಾವ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಎರಡನೆ **ಚರ** (Variable) ಸಂಗತಿಯ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತ-ದೆಯೋ ಆ ರಾಶಿಯು ಎರಡನೆಯದರ **ಫಲ** (Function) ವಿರುತ್ತದೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ೧೦೦ + ೪೦ **ವ** ಈ ರಾಶಿಯು **ವ** ದ **ಫಲ** ವಿರುವದು. ಈಗ ೧೦೦ + ೪೦ **ವ** ಅಂದರೆಯೇ **ಮ**, ಆದುದರಿಂದ **ಮ** ಇದು **ವ** ದ **ಫಲ**ವಿರು-ವದು. ಗಾಡಿಯು ಹೋಗುವ ಅಂತರವು ವೇಳೆಯ **ಫಲ** ವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೩ನೆಯ ಆಲೇಖವು ೧೦೦ + ೪೦**ವ** ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ **ಫಲ** ದ) ಆಲೇಖ ಇಲ್ಲವೆ ಮ = ೧೦೦ + ೪೦**ವ** ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವಿರುವದು. ಆ ಆಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ (−೫, −೧೦೦), ... — ಮೊ. ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯು ಅಸಲು ಎಷ್ಟಿರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದರಿಂದ ಬಡ್ಡಿ ಇದು ಅಸಲಿನ **ಫಲ**ವಿರುವದು. ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡುವ ತಿಂಗಳಿನ ಫೀ ಇದು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿ-ಸಿರುವದರಿಂದ ತಿಂಗಳ ಒಟ್ಟು ಫೀ ಹಣವು ಹುಡುಗರ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ **ಫಲ**ವಿರುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳ **ಫಲ**ವಿರುವದು, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ತಳ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ **ಫಲ**ವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಇಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲವು ಉದ್ದಳತೆ, ಅಗಲಳತೆ ಮತ್ತು ದಪ್ಪ ಇವುಗಳ **ಫಲ**ವಿರುವದು. ಸ್ಥೂಲದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೆಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಎರಡನೆಯದರ **ಫಲ**ವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಗತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಎರಡನೆಯದರ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದು ಈ ಎರಡರ ಸೂಚಿತಾರ್ಥವು ಒಂದೇ?

ಪ್ರ. ೭·೬. ನಿಯಮದಲ್ಲಿಯ ಸಂಚಯದಾರನ ಬಳಿ ಕೂಡುವ ಹಣದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಲ್ಲಿ ಆರಂಭದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಕಾಲ (ಕ) ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ಸ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ **ಸ**=೩೦೦೦+೨೦೦ಕ ಎಂದು ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವು (ಸ) ಎಷ್ಟೆಂಬುದು ಕ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿರುವದೋ ಅದರ ಮೇಲೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ **ಕ** ಹೇಗೆ, ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಹಾಗೆ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಅಂಕವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಕ=	-೪೦	-೩೫	-೩೦	-೨೦	-೧೫	-೧೦	೦	೫	೧೦	೧೫
ಸ=	-೫೦೦೦	-೪೦೦೦	-೩೦೦೦	-೧೦೦೦	೦	೧೦೦೦	೩೦೦೦	೪೦೦೦	೫೦೦೦	೬೦೦೦
ಕ=	೨೦	೨೫	೩೦							
ಸ=	೭೦೦೦	೮೦೦೦	೯೦೦೦							

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ **ಕ** **ಚರ**ವಿದ್ದು ಹೇಗೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ೩೦೦೦+೨೦೦ **ಕ** ದ ಬೆಲೆ-ಯಾದರೂ ಅಂದರೆಯೇ **ಸ** **ದ** ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು **ಕ** ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ನಿಶ್ಚಿತವಿದ್ದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ **ಕ** ದ

ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಈ ರಾಶಿಯು ಮತ್ತು ಆದುದರಿಂದಲೇ **ಸ** ಇದು **ಕ** ದ **ಫಲ** ವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೬ ನೇ ಆಲೇಖವು ೨೦೦೦ + ೨೦೦ **ಕ** ಈ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ (**ಫಲದ**) ಆಲೇಖವು ಇಲ್ಲವೆ **ಸ** = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ **ಕ** ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವಿರುತ್ತದೆ, ಆ ಆಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ (−೩೦, −೪೦೦೦),.........ಮೊದಲಾದ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಿಲ್ಲದೆ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವವೋ ಅಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಚರಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಇಲ್ಲವೆ ಕೇವಲ **ಚರ**ಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ-ಯಿರುತ್ತದೆ. **ಮ**=೧೦೦ + ೪೦ **ವ**; ಮತ್ತು **ಸ**=೨೦೦೦ + ೨೦೦ **ಕ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ **ಮ, ವ, ಸ, ಕ** ಇವು **ಚರ** ಸಂಜ್ಞೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವ **ಚರ**ಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ **ಚರ**ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಸ್ವತಂತ್ರ** ಇಲ್ಲವೆ **ಸ್ವಾಧೀನ ಚರಗ**ಳೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮೊದಲನೇ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಪರತಂತ್ರ** ಇಲ್ಲವೆ **ಪರಾಧೀನ ಚರಗಳೆಂದೆ**ನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀ-ಕರಣಗಳಲ್ಲಿ **ವ** ಮತ್ತು **ಕ** ಇವು **ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಗಳಿದ್ದು ಮ** ಮತ್ತು **ಸ** ಇವು **ಪರತಂತ್ರ ಚರಗಳಿರುತ್ತವೆ**. ಇಲ್ಲಿ **ಪರತಂತ್ರ ಚರವು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರದ ಫಲವಿರುತ್ತದೆಂಬು**ದನ್ನು ಮರೆಯಕೂಡದು.

೪ಕ್ಷ, ೩ಕ್ಷ − ೬, ೨ಕ್ಷ^{೨} + ೫, ೮ಕ್ಷ^{೩} + ೨ಕ್ಷ^{೨} + ೭ಕ್ಷ^{೨} + ಕ್ಷ − ೩,

$\frac{೯}{ಕ್ಷ}$ ೧ − $\frac{೩}{ಕ್ಷ}$ + $\frac{೫}{ಕ್ಷ^{೨}}$ ....

ಈ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು ಕ್ಷ ಈ **ಚರದ** ಫಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಕ್ಷ ದ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವಂಥ ಬೆಲೆಯು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಕ್ಷ ದ ಬೆಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ-ಹೋಗುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು **ಯ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಇವೇ **ಫಲ**ಗಳು ಯ = ೪ಕ್ಷ, ಯ = ೩ಕ್ಷ − ೬, ಯ = ೨ಕ್ಷ^{೨} + ೫, ಯ = ೮ಕ್ಷ^{೩}

$+ ೫\text{ಕ್ಷ}^{೩} + \text{ಕ್ಷ} - ೩$, $\text{ಯ} = \frac{೯}{\text{ಕ್ಷ}}$, $\text{ಯ} = ೧ - \frac{೧}{\text{ಕ್ಷ}} + \frac{೫}{\text{ಕ್ಷ}^{೨}}$ ....

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವವು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ಇದು **ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ**ವಿದ್ದು ಯ ಇದು **ಪರತಂತ್ರ ಚರ**ವಿರುವದು.

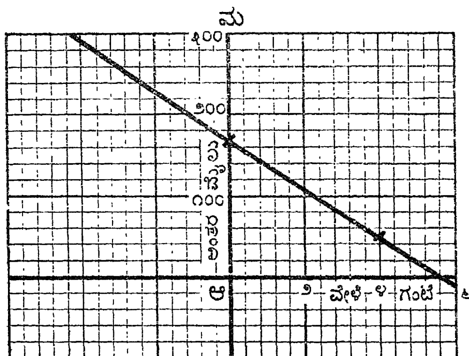
೭·೬. ಈಗ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೆ, ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. **ಮಧ್ಯಾಹ್ನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ೧೨೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ಅದು ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುತ್ತಲಿದೆ, ಆದರೆ ಅದು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಯಾವ ವೇಳೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದೆಂದು** ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂತರವು ಇರುವದೋ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು **ಮ** ದಿಂದ ಮತ್ತು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ವೇಳೆಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) **ವ** ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಗಾಡಿಯು ೧೨೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದು ತಾಸಿಗೆ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುವದರಿಂದ, ನಮ್ಮ ಊರಿಂದಿರುವ ಅಂತರ ಮತ್ತು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ **ಮ**=೧೨೦−೩೦**ವ** ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

೧೨೦−೩೦**ವ** ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖ ಮತ್ತು **ಮ**=೧೨೦−೩೦**ವ** ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ. ಇಲ್ಲಿ ೧೨೦−೩೦**ವ** ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವದು ಇರುವದೋ ಅದನ್ನು **ಮ** ಈ ವರ್ಣದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ ೧೨೦−೩೦**ವ** ಈ ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಯ ಬದಲಾಗಿ **ಮ**=೧೨೦−೩೦**ವ** ಈ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣದ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಷೆಯಿರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಉದಾ-

ಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಹಾಗೇ ಇರುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಸಹ ಬರುವದು. ನೀವು ಬೇಕಾದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ವರ್ಣಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಈಗ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ತಪ್ಪಾಗುವದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಮನಗಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ **ವ** ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇದ್ದಾಗ ೧೭೦–೩೦ **ವ** ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇರುವದು ಅಂದರೆಯೇ **ವ** ಮತ್ತು **ಮ** ಇವುಗಳ ಯಾವ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ವ = ೦, ೪, ೬ ಇದ್ದಾಗ

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಮ** = ೧೭೦—೩೦**ವ** = ೧೭೦, ೫೦, — ೧೦ ಇರುವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೮.

ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೦,೧೭೦), (೪,೫೦), ಮತ್ತು (೬,—೧೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. (ಮೂರೂ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು-ಕೊಳ್ಳತಕ್ಕದ್ದು.)

ಗಾಡಿಯು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಇದೇ ಆಲೇಖವು. ೧೭೦ ೩೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಆಲೇಖವು. ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಮ=೧೭೦ ೩೦ ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದೂ ಇದೇ ಆಲೇಖವು. ವ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವುದೇ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಇದೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

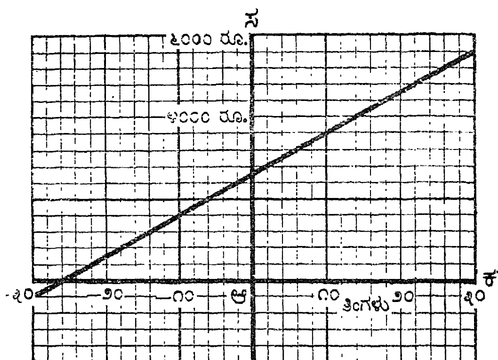
೭·೭. ಇನ್ನೊಂದು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸೇರಿ ಇಂದು ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳಾದವು. ಮೊದಲಿನಿಂದ ಅವರು ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ಯಂತೆ ಶಿಲುಕು ಇಡುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಶಿಲುಕನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರು. ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೬೦೦ ರೂ.ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಂದಿನಿಂದ ಯಾವಾಗಾದರೂ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆ ಸೂತ್ರದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) **ಕ** ದಿಂದ ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವನ್ನು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) **ಸ** ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ, ಶಿಲಕು ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೬೦೦ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೧೦೦ ರೂ. ಶಿಲುಕು ಇಡುವದ-ರಿಂದ, **ಸ**=೨೬೦೦+೧೦೦ **ಕ** ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಈಗ **ಸ**=೨೬೦೦+೧೦೦ **ಕ** ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವಾ. **ಕ** = ೦, —೨೬, ೧೦ ಇದ್ದಾಗ **ಸ** = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ **ಕ** = ೨೬೦೦, ೦, ೩೬೦೦ ಇರುವದು.

ಈಗ ನಾವು ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೦, ೨೬೦೦) ಮತ್ತು (—೨೬, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ತೆಗೆದಂಥ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೧೦, ೩೬೦೦) ಈ ಬಿಂದುವು ಸಹ ಇರುವದರಿಂದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದರಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ತಪ್ಪು ಆಗಿಲ್ಲ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೯.

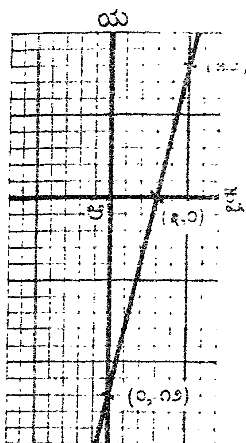
೨೬೦೦ + ೧೦೦**ಕ** ಈ ರಾಶಿಯು ಇಲ್ಲವೆ **ಸ** = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದು ಇದೇ ಆ ಆಲೇಖವು.

೭·೮. **ಉ. ೩.** ೪ಕ್ಷ — ೧೨ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕ್ಷ = ೦, ೩, ೫ ಇದ್ದಾಗ

೪ಕ್ಷ — ೧೨ = —೧೨, ೦, ೮ ಇರುವದು.

(೦, —೧೨) ಮತ್ತು (೩, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ೫, ೮) ಈ ಬಿಂದುವಾದರೂ ಅದರ ಮೇಲಿರುವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೦.

ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೬ ಈ ರೀತಿಯ ರೇಖೆ ಬರುತ್ತದೆ. ೪ಕ್ಷ—೧೬ ಇದು [illegible] ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೬ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದು ಇದೇ ಆಲೇಖವು.

ಉ.೪. ೨ಕ್ಷ+೩ಯ = ೧೨ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಲೇಖಿಸಿರಿ. [illegible] ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು [illegible]

೩ಯ = ೧೨—೨ಕ್ಷ

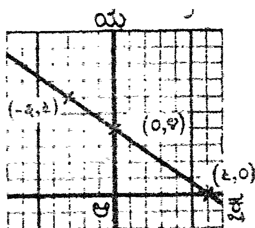
∴ ಯ = ೪—⅔ಕ್ಷ

ಇದರ [illegible] ಕ್ಷ ಕ್ಕೆ [illegible] ಯ [illegible] ಬೆಲೆಗಳನ್ನು [illegible] ಮಾಡುವದು ಅನುಕೂಲ [illegible]

ಕ್ಷ = ೦, ೬, —೩ ಆದಾಗ

ಯ = ೪, ೦, ೬ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಕಂಡುಬರುವವು.

(೦, ೪), (೬, ೦) ಮತ್ತು (—೩, ೬) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ನಂತರ ನೋಡಲಿಕ್ಕೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ೨ಕ್ಷ+೩ಯ = ೧೨ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದು ಇದೇ ೬ ಆಲೇಖವು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

೧. ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ :

(೧) ೨ಕ್ಷ+೩; (೨) ೪ಕ್ಷ—೧; (೩) ೫ಪ+೮;
(೪) ೯ಮ—೭; (೫) ೧೨—೬ಸ; (೬) ೮—೪ರ.

೨. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಿಸಿರಿ :

(೧) ಯ = ಕ್ಷ—೬; (೨) ಯ = ೩ಕ್ಷ+೧; (೩) ಯ = $\frac{೧}{೨}$ಕ್ಷ—೫;
(೪) ಯ = $\frac{೧}{೩}$ಕ್ಷ+$\frac{೨}{೩}$; (೫) ೨ಯ = ೮—೩ಕ್ಷ; (೬) ೪ಕ್ಷ+ಯ = ೫;
(೭) ಕ್ಷ+$\frac{೨}{೫}$ಯ = ೩; (೮) $\frac{ಕ್ಷ}{೪}$ — ಯ = ೧; (೯) $\frac{ಕ್ಷ}{೨}$ + $\frac{ಯ}{೩}$ = ೫;
(೧೦) ಕ್ಷ = ೪—೨ಯ; (೧೧) ೫ಪ—೩ಮ = ೨;
(೧೨) ೪ರ—೭ಸ+೩ = ೦.

೩. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಿಸಿರಿ :

(೧) ಯ = ೫ಕ್ಷ; (೨) ಯ = $\frac{೧}{೨}$ಕ್ಷ; (೩) ೨ಯ+೩ಕ್ಷ = ೦;
(೪) ಪ = ೭ಮ; (೫) ರ—$\frac{೩}{೪}$ಸ = ೦;

ಈ ಐದೂ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣವೇನು ?

೪. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯುವದಿದೆ.

(೧) ಯ = ೨ಕ್ಷ+೫; ಯ = ೨ಕ್ಷ—೩; ಯ = ೨ಕ್ಷ—೧; ಯ—೨ಕ್ಷ = ೪.
(೨) ಪ = ೪ಮ—೩; ಪ = ೪ಮ+೧; ಪ = ೪ಮ+೪;
ಪ—೪ಮ+೭ = ೦.
(೩) ೩ರ+೪ಸ = ೯; ರ+$\frac{೪}{೩}$ಸ = ೧; $\frac{೩}{೪}$ರ+ಸ+೮ = ೦;
$\frac{ರ}{೪}$ + $\frac{ಸ}{೩}$ = ೪.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಆಲೇಖಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ?

೫. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ [illegible] ಬಿಂದುಗಳನ್ನು [illegible]. ತರುವಾಯ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳ [illegible] ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಯ = [illegible] ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು [illegible].

	[illegible]	ಇತ್ಯಾದಿ
ಯ = ೩ಕ್ಷ − ೭	[illegible]	ಇತ್ಯಾದಿ

ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು [illegible] ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆಯೋ?

೬. [illegible] ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ, [illegible] ಕ್ಷ + [illegible] ಯ + [illegible] = ೦ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು [illegible].

	[illegible]	[illegible]	ಇತ್ಯಾದಿ
ಯ =	[illegible]	[illegible]	ಇತ್ಯಾದಿ

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು [illegible] ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆಯೋ?

೭. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ [illegible] ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು [illegible] ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(೧) ಯ = ೨ಕ್ಷ + ೫ ; ಯ = − ೩ಕ್ಷ + ೬.

(೨) ೪ಕ್ಷ + ೩ಯ = ೯ ; ೩ಕ್ಷ − ೨ಯ = ೮.

(೩) ೫ಕ್ಷ + ೭ಯ + ೭ = ೦ ; ೨ಕ್ಷ [illegible] ಯ + [illegible] = ೦.

(೪) ೨ಕ್ಷ + ೩ಯ + ೬ = ೦ ; ೬ಕ್ಷ − ೪ಯ − ೩ = ೦.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ?

೪.

೭·೯. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಒಂದೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ೨ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ೨ ಆಲೇಖಗಳು

ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ (೦,೦) ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆ-ಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದು ಕಂಡು ಬಂದಿರಬಹುದು. ಯಾವುದರಲ್ಲಿ **ಸ್ಥಿರಪದ** (Constant term) ಇಲ್ಲ, ಇಂಥ ಅಂದರೆ **ಯು** = **ಮಕ್ಷ**, **ಅಯು** + **ಕಕ್ಷ** = ೦ ಇಂಥಸ್ವರೂಪದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ-ಗಳೆಂದರೆ ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳೇ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ **ಕ್ಷ** = ೦ ಇದ್ದರೆ **ಯು** = ೦ ಇದ್ದಿರ-ಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ರೇಷೆಗಳು (೦,೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗಬೇಕು.

೭·೧೦. **ಕ್ಷ**-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಕೋಟ್ಯಂ-ತರವೆಂದರೆ** **ಕ್ಷ**-ಅಕ್ಷದಿಂದ **ಶೂನ್ಯ** ಅಂತರವು, ಆದುದರಿಂದ **ಯು** = ೦ ಇದು **ಕ್ಷ**-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ **ಯು**-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ-ಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜಾಂತರವೆಂದರೆ** **ಯು**-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವು ಶೂನ್ಯ, ಆದುದರಿಂದ **ಕ್ಷ**=೦ ಇದು **ಯು**-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು.

೭·೧೧. **ಕ್ಷ**-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೫ ಮಾನಗಳ (Units) ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು ೫, ಮತ್ತು —೫ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು —೫, ಆದುದರಿಂದ **ಯು** = ೫ ಮತ್ತು **ಯು** = —೫ ಇವು ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣ-ಗಳಿರುವವು. ಅದರಂತೆಯೇ **ಅ** ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವು-ದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಕೋಟಿಯು** **ಅ** ಇರುವದರಿಂದ **ಯು** = **ಅ** ಇದು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು. **ಯು** = ೩, **ಯು** + ೩ = ೦ **ಯು** = ೬, **ಯು** + ೬ = ೦ ಇವು **ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ** (**ಕ್ಷ**—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂ-ತರವಿರುವ ರೇಷೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೭·೧೨. **ಯು**-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೪ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜವು** ೪, ಮತ್ತು —೪ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾ-ದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜ**—೪, ಆದುದರಿಂದ **ಕ್ಷ**=೪, **ಕ್ಷ**=— ೪ ಇವು ಅವುಗಳ

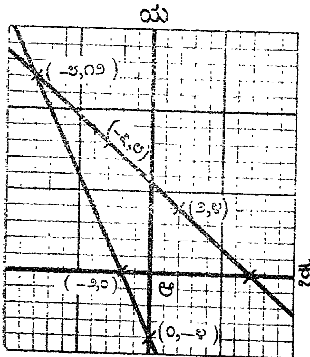
ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುವವು. ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜ** ಅ, ಆದುದರಿಂದ **ಕ್ಷ** = ಅ ಇದು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು. **ಕ್ಷ** = ೨, **ಕ್ಷ** + ೨ = ೦, **ಕ್ಷ** = ೯, **ಕ್ಷ** + ೯ = ೦ .... ಇವು **ಕೋಟ್ಯಕ್ಷಕ್ಕೆ** (**ಯ** ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಷೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ-ಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೭.೧೩. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೪ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆ-ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೋಟ—ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ-ವಿರುವ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳಿರುವದು ಕಂಡುಬಂದಿರಬಹುದು. ಯಾವ ಸಮೀಕರಣ-ಗಳನ್ನು **ಯ** = **ಮಕ್ಷ** + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ **ಕ್ಷ**-ಪದದ ಸಹಗುಣಕವು ಒಂದೇ ಇರುವದೋ, ಇಲ್ಲವೆ **ಅಕ್ಷ** + **ಕಯ** + **ಗ** = ೦ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ **ಕ್ಷ**—ಪದ ಮತ್ತು **ಯ** ಪದ ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಅ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಗ.... ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೭.೧೪. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೬ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೋಟ—ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬಂದಿರಬೇಕು. ಯಾವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣ-ಗಳನ್ನು **ಯ** = **ಮಕ್ಷ** + **ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳ **ಕ್ಷ**—ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು −೧ ಬರುವದೋ, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ-ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಅ ಮತ್ತು ಯ = − $\frac{೧}{ಮ}$ ಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

೫.

೭·೧೫· ಯಾವದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೇಖಕದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಬಂದ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು. ಈಗ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಅಂಥವು ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವ್ಯಾವರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೋ, ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೋ ಮತ್ತು ಆ ಸರಳ ರೇಷೆಯು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವಿರುತ್ತದೆಯೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಆಲೇಖಿತ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯುವದಿದ್ದಾಗ ಆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುವೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು, ಅವುಗಳ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದೇ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದಿರಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೨) ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸುವದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೨.

ನಾವು ನೋಡುವದೇನೆಂದರೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಷೆಯು (೩,೪), ಮತ್ತು (−೩,೮) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ

ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **ಯ** = ಅ**ಕ್ಷ** + ಕ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಸರಳ ರೇಷೆಯು (೨,೪) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ **ಕ್ಷ** = ೨, **ಯ** = ೪ ಇದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣದ ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಇದು (−೩, ೮) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ **ಕ್ಷ** = −೩, **ಯ** = ೮ ಇದ್ದರೂ ಸಮೀಕರಣದ ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ

ಕ್ಷ = ೨ ಇದ್ದಾಗ ಯ = ೪,

ಕ್ಷ = −೩ ಇದ್ದಾಗ ಯ = ೮

∴ ೪ = ೨ಅ + ಕ .... (೧)

∴ ೮ = −೩ಅ + ಕ .... (೨)

ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ −೪ = ೫ಅ ∴ ಅ = −೪/೫

ಒಂದನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ = −೪/೫ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ

೪ = −೮/೫ + ಕ, ಅಂ. ಕ = ೨೮/೫.

∴ **ಯ** = −೪/೫ **ಕ್ಷ** + ೨೮/೫ ಇದು ಬೇಕಾದ್ದ ಸಮೀಕರಣವು. ಅಥವಾ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈಗ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನೂ ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ೪**ಕ್ಷ** + ೫**ಯ** = ೨೮ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಾವು ಕ್ಷ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕತ್ತರಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ರೇಷೆಯು ಈ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯ** ಇವುಗಳಾಗಿಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. ರೇಷೆಯು (೭,೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು **ಕ್ಷ** = ೭, **ಯ** = ೦ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲಿನ ಎರಡನೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು- ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದು (೦, −೪) ಮತ್ತು (−೩, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣವು **ಯ** = ಮ**ಕ್ಷ** + ಗ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ **ಕ್ಷ** = ೦ ಇದ್ದಾಗ **ಯ** = −೪, ಮತ್ತು **ಕ್ಷ** = −೩ ಇದ್ದಾಗ **ಯ** = ೦,

∴ −೪ = ೦ × ಮ + ಗ ಅಂ. ಗ = −೪,

೦ = −೨ಮ + ಗ ಅಂ. ಮ = $\frac{೧}{೨}$ಗ = −೨.

∴ ಯ = −೨ಕ್ಷ − ೪ ಇದು ಬೇಕಾಗಿದ್ದ ಸಮೀಕರಣವು. ಇಷ್ಟವಿದ್ದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೨ಕ್ಷ + ಯ + ೪ = ೦ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

೭·೧೬. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೨) ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು (−೮, ೧೨) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ (−೮, ೧೨) ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕ್ಷ = −೮ ಮತ್ತು ಯ = ೧೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ೪ಕ್ಷ + ೫ಯ = ೨೮, ಮತ್ತು ೨ಕ್ಷ + ಯ + ೪ = ೦ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು ಹಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆಲೇಖಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳೇ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳಿರುವವು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಆಲೇಖಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(೧) (೪,೮) (೨,೨), (−೧, −೭).

(೨) (೧,೧೫), (−೧, −೧), (−೨, −೯).

(೩) (−೪,೦), (೦,೮), (೨,೧೨). (೪) (−೪, −೭), (೦, −೪), (೪, −೧).

(೫) (−೩,೬), (೦,೫), (೩,೪). (೬) (−೩, −೧), (೧,೩), (೫,೭).

(೭) (−೩, −೭), (೦, −೫), (೩, −೩), (೬, −೧)

(೮) (−೪, −೪), (೧,೦), (೬,೪), (೧೧,೮).

(೯) (೫,೨), (೧,೧), (−೩,೦) (−೭, −೧).

(೧೦) (−೭,೫), (೧,೧), (೩,೦), (೫, −೧), (೭, −೨).

೭.೧೭. ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಾಡಿಯ ಆಲೇಖರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು-ಕೊಂಡೆವೋ ಆ ಗಾಡಿಯು ಮತ್ತು ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಆಲೇಖರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವೋ ಆ ಗಾಡಿಯು, ಇವೆರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಓಡುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅವು ಎರಡೂ ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಸ್ಥಳ-ಗಳಿಂದ ಹೊರಟು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ನಂತರ ಮುಕ್ಕಾಮಿನ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುವದ-ರಿಂದ, ಅವು ದಿವಸದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಾದರೂ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಕೂಡಲೇ-ಬೇಕು. ಒಂದೇ ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಅಕ್ಷಗಳ ಒಂದೇ ಜೋಡಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ ನಾವು ಆ ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮಣದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ.

ಹಿಂದೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆಯೇ ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷವನ್ನು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಶುರು-ವಾಗುವ ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ಅದು ಮುಂದೆ ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ಅದರ ಅಂತರವು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ (೨ ತಾಸುಗಳ ಮೇಲೆ)

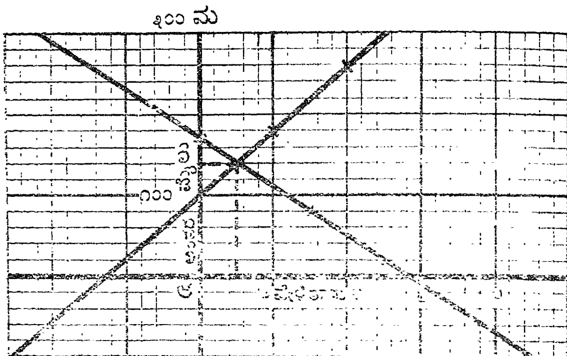
(೧೨ ಗಂಟೆಗೆ)	(೨ ಗಂಟೆಗೆ)	(೪ ಗಂಟೆಗೆ)
೧೦೦ ಮೈಲುಗಳು	೧೮೦ ಮೈಲುಗಳು	೨೬೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವು-ಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಮೊದಲನೇ-ಗಾಡಿಯ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು.

ಇನ್ನು ಎರಡನೇ ಗಾಡಿ. ಇದು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಕೆಳ-ಗಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೧೬೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ನಮ್ಮೂರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವದು. ಆದುದ-ರಿಂದ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಕೆಳಗಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಅಂತರವು

೧೨ ಗಂಟೆಗೆ,	೨ ಗಂಟೆಗೆ,	೩½ ಗಂಟೆಗೆ.
೧೬೦ ಮೈಲುಗಳು	೮೦ ಮೈಲುಗಳು	೨೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಈ ಎರಡನೆಯ ಗಾಡಿಯ ಮಾರ್ಗ-ಕ್ರಮಣದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೩.

ಈಗ ಈ ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವವೋ ಆ ವೇಳೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ಥಳವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕು. ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುವು ಅಂದರೆ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅಂತಹದು. ಆಲೇಖಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ (೧,೧೪೦) ಇದು ಆ ಬಿಂದು-ವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನಂದರೆ ಮಧ್ಯಾನ್ಹದ ನಂತರ ೧ ತಾಸಿನ ಮೇಲೆ ಆ ಗಾಡಿಗಳು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಪೂರ್ವದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವವು, ಮತ್ತು ಇದು ಸರಿಯೇ ಇರುವದು. ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ೧ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ (೧೦೦ + ೪೦) ಅ. ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಮತ್ತು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೬೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ

ಮೇಲೆ ಇರುವ ಮತ್ತು ನಮ್ಮೂರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುವ ಗಾಡಿಯಾದರೂ ೧ ಗಂಟೆಗೆ (೧೭೦—೩೦) ಅಂ. ೧೪೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು.

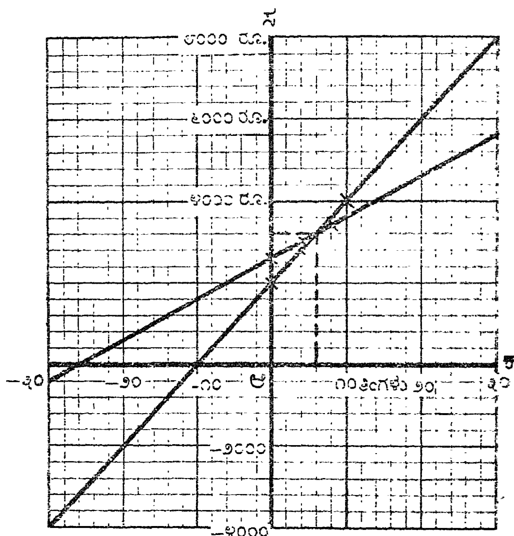
ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವೇಳೆ (ವ) ಮತ್ತು ಅಂತರ (**ಮ**) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಮ**=೧೦೦+೪೦ವ ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು **ಮ**=೧೭೦−೩೦ವ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿ ಸುತ್ತವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ **ಮ**=೧೦೦+೪೦ವ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು, **ಮ**=೧೭೦—೩೦ವ ಇದು ೨ ನೇ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦,೧೦೦), (೨,೧೮೦), (೪,೨೬೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು ವ=೦, ೨, ೪, **ಮ**=೧೦೦, ೧೮೦, ೨೬೦ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ **ಮ** ೧೦೦+೪೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦,೧೭೦). (೩,೮೦). (೫,೨೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು, ಮತ್ತು ವ = ೦, ೩, ೫; **ಮ** = ೧೭೦, ೮೦, ೨೦. ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ **ಮ** = ೧೭೦ −೩೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ತತೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಂಥ ವ ಮತ್ತು **ಮ** ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಇರುವದು. ಸಾಧಾರಣ ಬಿಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (೧,೧೪೦) ಇವು ಇರುವದರಿಂದ **ವ = ೧, ಮ = ೧೪೦** ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗಬೇಕು. ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾಣುವದೂ ಇದೇ. **ಮ**=೧೦೦+೪೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ **ವ**=೧ ಇದ್ದಾಗ **ಮ** = ೧೦೦+೪೦ = **೧೪೦**. **ಮ** = ೧೭೦ — ೩೦ = **೧೪೦.**

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ **ಮಾನಗಳನ್ನು**

ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಆಲೇಖಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ **ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳೇ** ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳು.

ಉ. ೧೮. ಇದೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿಯ ಹಿಂದಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. **ಪ.** ೩ನೆಯದರೊಳಗಿನ ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತಧನದ ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ **ಪ.** ೭ನೆಯದರೊಳಗಿನ ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರು ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ, ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳ ಒಂದೇ ಜೋಡಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವಾ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೪.

ವಸಂತರಾಯರ ಶಿಲಕು

ಇಂದು	೪ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ.	೧೦ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ
೨೦೦೦ ರೂ.	೨೮೦೦ ರೂ.	೪೦೦೦ ರೂ.

ಆದುದರಿಂದ (೦, ೨೦೦೦), (೪, ೨೮೦೦), (೧೦, ೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತ ಧನದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ಶಿಲಕು

ಇಂದು	೪ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ	೮ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ
೨೬೦೦ ರೂ.	೩,೦೦೦ ರೂ.	೩,೪೦೦ ರೂ.

ಆದುದರಿಂದ (೦,೨೬೦೦), (೪,೩೦೦೦), (೮,೩೪೦೦)

ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರು ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೬,೩೨೦೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ೬ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಹಣವು ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದು, ಮತ್ತು ಇದು ನಿಜವೇ. ೬ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ವಸಂತರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ (೨೦೦೦+೬×೨೦೦) ರೂ. ಅಂ. (೨೦೦೦+೧೨೦೦) ರೂ., ಅಂ. ೩೨೦೦ ರೂ. ಇರುವವು. ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯೂ (೨೬೦೦+೬×೧೦೦)ರೂ. ಅಂ. (೨೬೦೦+೬೦೦) ರೂ. ಅಂ. ೩,೨೦೦ ರೂ.ಗಳೇ ಇರುವವು.

ಈಗ ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇನೆಂದರೆ ವಸಂತರಾಯರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಧನವು (**ಸ**) ಮತ್ತು ಕಾಲ (**ಕ**) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಸ** = ೨೦೦೦+೨೦೦**ಕ** ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು **ಸ** = ೨೬೦೦+೧೦೦**ಕ** ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ **ಸ** = ೨೦೦೦+೨೦೦**ಕ** ಇದು ಮೊದಲನೇ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು, **ಸ** = ೨೬೦೦+೧೦೦**ಕ** ಇದು ಎರಡನೆಯದರದಿರುತ್ತದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦,೨೦೦೦), (೪,೨೮೦೦), (೧೦,೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು **ಕ** = ೦, ೪, ೧೦, **ಸ** = ೨೦೦೦, ೨೮೦೦, ೪೦೦೦ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ **ಸ** = ೨೦೦೦ + ೨೦೦**ಕ** ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦, ೨೬೦೦), (೪,೩೦೦೦), (೮,೩೪೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು

ಕ = ೦, ೪, ೮; ಸ = ೨೬೦೦, ೩೦೦೦, ೩೪೦೦, ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಸ = ೨೬೦೦+೧೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

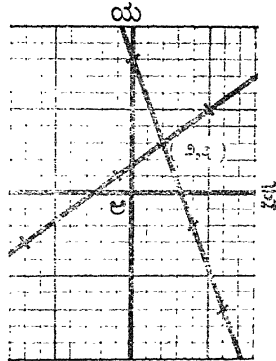
ಈಗ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೬,೩೨೦೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕ = ೬; ಸ = ೩೨೦೦ ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ತತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು ಹಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಸ = ೨೦೦೦+೨೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦+೨೦೦ ಕ = ೩೨೦೦ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಸ = ೨೬೦೦+೧೦೦ಕ ಇದರಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ × ೬ = ೨೬೦೦+೬೦೦ = ೩೨೦೦ ಇರುವದು.

೭·೧೯. ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ **ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಗಳು, ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ರೀತಿ ಉತ್ಥಾಪನ** ಇಲ್ಲವೆ **ಆದೇಶರೀತಿ; ತುಲನರೀತಿ** ಮತ್ತು **ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸರೀತಿ** ಇಲ್ಲವೆ **ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮ**, ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದವು. ಇಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವದಿದು **ಐದನೇ ರೀತಿಯು—ಆಲೇಖರೀತಿಯು**—ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾ. ೫ಕ್ಷ+೨ಯ= ೧೬, ೨ಕ್ಷ−೩ಯ+೫=೦ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ೫ಕ್ಷ+೨ಯ=೧೬ ಇದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಕ್ಷ=೦, ೪,೬ ಇದ್ದಾಗ ಯ=೮, −೨, −೭ ಇರುವದು. ಅಡ್ಡ-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕ್ಷ ಅಕ್ಷವೆಂದು ಉಭ್ಭ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯ ಅಕ್ಷವೆಂದು ತಿಳಿದು (೦,೮) (೪−೨) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು (೬, −೭) ಒಳಗಿಂದಾದರೂ ಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ೫ಕ್ಷ+೨ಯ=೧೬, ಇದರ ಆಲೇಖವಾಯಿತು. ಈಗ ೨ಕ್ಷ−೩ಯ+೫=೦ ಇದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ

ಕ್ಷ = − ೭, −೧, ೫ ಇದ್ದಾಗ ಯ = − ೩, ೧, ೫ ಇರುವದು. (−೭, −೩), (−೧,೧), (೫,೫) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ೨ಕ್ಷ — ೩ಯ + ೫ = ೦ ಇದರ ಆಲೇಖವಾಯಿತು.

ಎರಡೂ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದ-ನ್ನೊಂದು (೨,೩) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ; ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ= ೨; ಯ = ೩.

[ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ = ೨ ಯ = ೩ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳ ಸಾರ್ಥಕತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ೫ಕ್ಷ + ೨ಯ = ೫ × ೨ + ೨ × ೩ = ೧೦ + ೬ = ೧೬, ೨ಕ್ಷ — ೩ಯ + ೫ = ೨ × ೨ — ೩ × ೩ + ೫ = ೪ — ೯ + ೫ = ೦.]



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೫.

೭·೧. ೪ಕ್ಷ—೫ = ೭—೨ಕ್ಷ ಈ ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸುವದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿದಿರಿ. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಆಲೇಖ-ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದೇ? ನಿಜವಾಗಿ ಬರುವದು. ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಗಳ (ಅಂದರೆಯೇ **ಫಲಗಳ**) ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಅದರಂತೆ ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷವು ಕ್ಷ ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಉಭ್ಭ ಅಕ್ಷವು ಫಲ — ಅಕ್ಷವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ೪ಕ್ಷ—೫ ಮತ್ತು ೭—೨ಕ್ಷ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ೪ಕ್ಷ—೫ ಇದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಕ್ಷ= —೧, ೦, ೨, ಇದ್ದಾಗ

೪ಕ್ಷ—೫= —೯,—೫, ೩ ಇರುವದು.

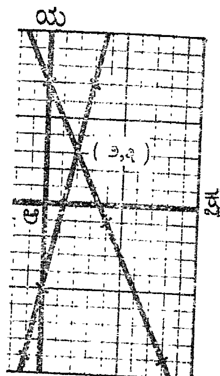
∴ (—೧, ೯), (೦, —೫), (೨,೩) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯು ೪ಕ್ಷ—೫ ಇದರ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ೭—೨ಕ್ಷ ಇದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ,

ಕ್ಷ = ೦, ೪, ೮, ಇದ್ದಾಗ ೭—೨ಕ್ಷ = ೭, — ೧, — ೯ ಇರುವದು.

∴ (೦,೭), (೪, — ೧), (೮, — ೯) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯು ೭—೨ಕ್ಷ ಇದರ ಆಲೇಖವಾಗುವದು.

ಎರಡೂ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೩,೨) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ = ೩, ಇಲ್ಲಿ ೨ ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಕ್ಷದ ಬೆಲೆಯಿರುತ್ತದೆ.

[ಕ್ಷ = ೩ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವದೆ. ಕ್ಷ = ೩ ಇದ್ದಾಗ ಎಡಬದಿಯು = ೪ಕ್ಷ — ೧೦ = ೧೨ — ೧೦ = ೨, ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯು = ೮ — ೨ಕ್ಷ = ೮ — ೬ = ೨.]



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೬.

೨೩೯. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ೪ಕ್ಷ—೧೦ = ೮—೨ಕ್ಷ ಈ ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದೆಂದರೆ ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೦, ಯ = ೮—೨ಕ್ಷ ಈ ಸಮಯಾಪಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಕ್ಷ ದ ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೂಲ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯ ದಿಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೦ = ೮—೨ಕ್ಷ ಹೀಗೆ ಆ ಸಮೀಕರಣವಾಗುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೦ ಮತ್ತು ಯ = ೮—೨ಕ್ಷ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸಮಯಾಪಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು. ೪ಕ್ಷ—೧೦ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖವೇ ಯ = ೪ಕ್ಷ—೧೦ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವು, ಮತ್ತು ೮—೨ಕ್ಷ ದ ಆಲೇಖವೇ ಯ = ೮—೨ಕ್ಷ ದ ಆಲೇಖವು. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೬) ಆಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ

(೧) ೪ಕ್ಷ—೩ಯ = ೩; ೨ಕ್ಷ+೫ಯ = ೨೧.
(೨) ೭ಕ್ಷ—೫ಯ = ೧೨; ೩ಕ್ಷ+೨ಯ = ೧.
(೩) ೪ಯ+೭ರ = ೧೫; ೪ಯ—೭ರ = ೧.
(೪) ೪ತ+೨ಸ = ೫; ೩ತ—ಸ = ೦.
(೫) ೨ಯ—೫ರ = ೧೩; ೩ಯ+ರ = ೧೧.
(೬) ೬ಯ—೩ವ = ೯; ೫ಯ+೭ವ = ೧೭.
(೭) ೨ಪ+೫ಮ+೧೫ = ೦; ೪ಪ—೩ಮ = ೯.
(೮) ಯ = ೪ಕ್ಷ+೩; ಯ = ೩ಕ್ಷ+೫.
(೯) ೨ಪ+$\frac{೧}{೨}$ಮ = ೫; ೪ಪ—$\frac{೧}{೩}$ಮ = ೨.
(೧೦) $\frac{೧}{೨}$ಯ+$\frac{೧}{೩}$ಕ್ಷ = ೫; $\frac{೧}{೩}$ಯ+$\frac{೧}{೨}$ಕ್ಷ = ೫.
(೧೧) ೨ರ—$\frac{೧}{೨}$ವ = ೫; $\frac{೧}{೩}$ರ—ವ+೩ = ೦.
(೧೨) ೮ರ+೩ಸ—೫ = ೦; ೩ರ—೫ಸ—೮ = ೦.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(೧೩) ೪ಕ್ಷ—೩ = ೨ಕ್ಷ+೫. (೧೪) ೩ವ+೭ = ೨—೭ವ.
(೧೫) ೨ರ—೭ = ೪—ರ (೧೬) ೨—೫ಸ = ೮+೩ಸ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯು ಯಾವದಿದ್ದರೆ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ (**ಫಲಗಳ**) ಬೆಲೆಗಳು ಸಮಾನವಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಆಲೇಖ-ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಳಿರಿ.

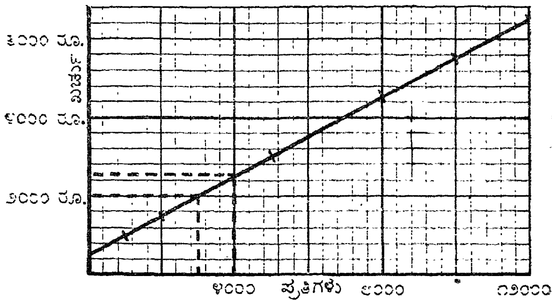
(೧೭) ೫ಕ್ಷ—೩ ಮತ್ತು ೧೪—೩$\frac{೧}{೨}$ಕ್ಷ.
(೧೮) ೪ಪ—೯ ಮತ್ತು $\frac{೨೭—ಪ}{೮}$.
(೧೯) $\frac{೬ಸ+೪}{೫}$ ಮತ್ತು $\frac{೮ಸ+೫}{೭}$.
(೨೦) $\frac{೯ನ+೧೭}{೨}$ ಮತ್ತು ೯—$\frac{೧—೧೪ನ}{೩}$.

೭.

೭·೨೨. **ಉ.೧. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦,೨೦೦೦,೫೦೦೦, ೮೦೦೦, ೧೦೦೦೦, ೧೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ**

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೦೦೦ ರೂ., ೧೫೦೦ ರೂ., ೩೦೦೦ ರೂ., ೪೫೦೦ ರೂ., ೫೫೦೦ ರೂ., ೬೫೦೦ ರೂ., ಹೀಗೆ ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೩೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬರುವದು ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ, ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫" = ೧೦೦೦ ಪ್ರ.) ಮತ್ತು ಛಾಪಿಸುವ ಖರ್ಚನ್ನು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫" = ೧೦೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸುವಾ. ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ



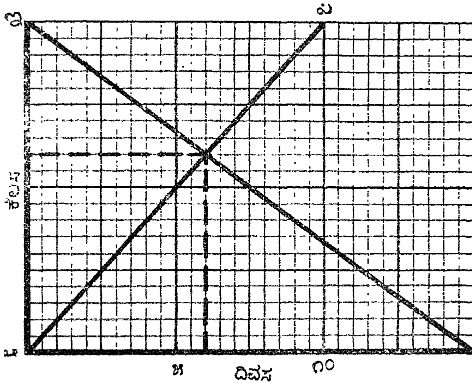
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೭.

ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ೩೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ೨೦೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ೪೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಉ.೭. ಒಂದು ನೆಲವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪಾಂಡುರಂಗನೊಬ್ಬನೇ ೧೦ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ರಾಮನು ೧೫

ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುವರು ?

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಾಲ ೦.೨" = ೧ ದಿವಸ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ೨" = ೧ ಕೆಲಸವನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಅಪ ಇದು ಪಾಂಡುರಂಗನ ಕೆಲಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಇರ ಇದು ರಾಮನ ಕೆಲಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅದರ



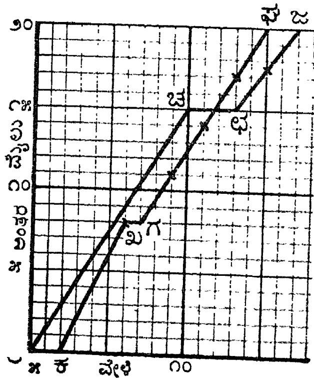
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೮.

ಭುಜಾಂತರ ೬ ಇದ್ದುದರಿಂದ ೬ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಪಾಂಡುರಂಗನು ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ೩/೫ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದು ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨/೫ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾನೆ, ಅಂದರೆ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಉ ೩. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಒಂದು ೨೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೃಷ್ಣನು ಪ ಊರಿ-

ನಿಂದ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ೨ ತಾಸುಗಳ ವರೆಗೆ ನಡೆದನಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಊರಿನಿಂದ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ೧೦ ಗಂಟೆಯ ವರೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಒಂದೂವರೆ ಗಂಟೆ ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೨½ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಆ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರು ಎಂಬುವದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೫ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ಕಾಲವನ್ನು (೦.೨″ = ೧ ತಾಸು) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪ ಊರಿನಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು (೦.೧″=೧ ಮೈ) ತೋರಿಸಿದರೆ ಕಖಗಘ ಇದು ಕೃಷ್ಣನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಅಚಛಜ ಇದು ಗೋವಿಂದನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅವು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಬಿಂದುವು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಆರಂಭಸ್ಥಾನದಿಂದ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ



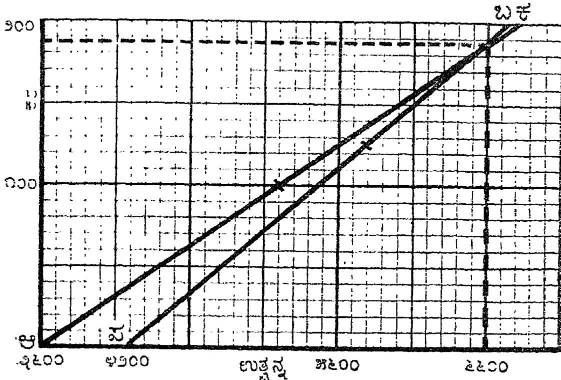
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೯.

ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರು ಹತ್ತು ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ನಂತರ ಪ ಊರಿನಿಂದ ೧೫ ಮೈ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರು.

ಉ.೪. ಮೊದಲನೆ ೩೬೦೦ ರೂ., ಗಳ ರಕಮಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-

ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧ ಆಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಕರವು ಕೊಡಬೇಕಾಗು-ತ್ತಿತ್ತೋ ಅಷ್ಟೇ ಮೊದಲಿನ ೪೨೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧। ಆಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗಾದರೂ ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (೧" = ೧೦೦೦ ರೂ.) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕರವನ್ನು (೧" = ೧೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಕ

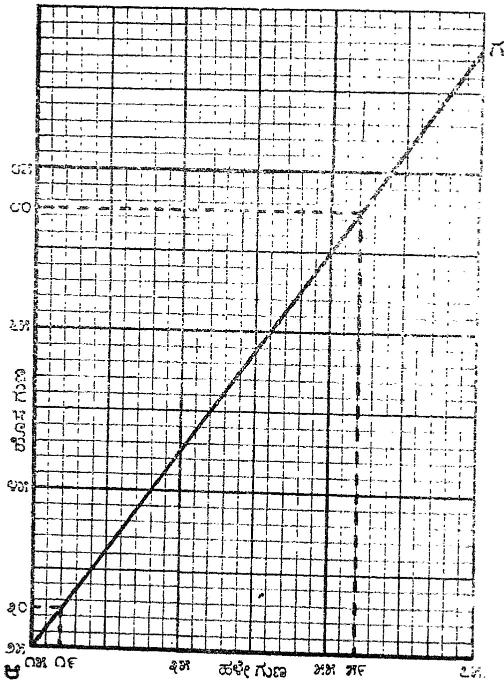


ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೦.

ಇದು ಕರವನ್ನು ಆಕರಿಸುವ ಹಳೇ ಪದ್ಧತಿಯು, ಮತ್ತು ಪಬ ಇದು ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅದು ೬೬೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೧೮೭ತ್ರಿ ರೂ. ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೫. ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೭೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕವು. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳು-

ವವನಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು. ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳು ೧೦೦ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳು ೨೫ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಎಲ್ಲ ಗುಣಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಈಗ ಕೊಡತಕ್ಕ ಗುಣಗಳು, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ-ವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಮೊದಲು



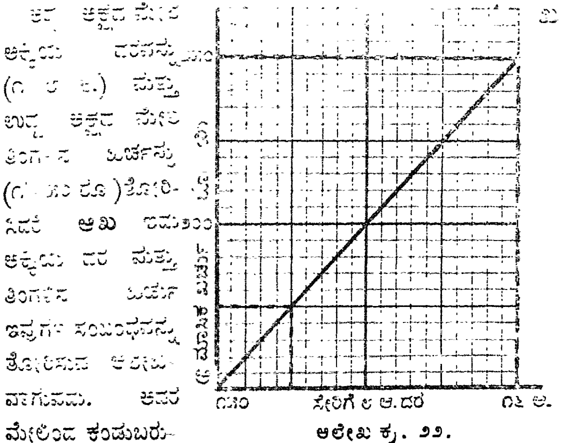
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೧.

೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯು-ವವೆಂಬುದನ್ನೂ ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧=೨೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಈಗಿನ ಹೊಸ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧=೨೦) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಗ ರೇಖೆಯು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ೩೦ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು, ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ೫೯ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದ-ವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಉ. ೬. ಅಕ್ಕಿಯ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ೮ ಆಣೆ ಇದ್ದಾಗ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೨೦೦ ರೂ. ಇತ್ತು ಮತ್ತು ೧೨ ಆಣೆ ಇದ್ದಾಗ ೨೫೦ ರೂ. ಇತ್ತು. ದರವು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಏರಿ ಅದು ಸೇರಿಗೆ ೧ ರೂ. ಆದರೆ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೧೭೫ ಇದ್ದಾಗ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತು ?

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಕ್ಕಿಯ ದರವನ್ನು (೧=೮ ಪೈ.) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚನ್ನು (೧=೫೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಖ ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಕಿಯ ದರ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖ-ವಾಗುವದು. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡುಬರು-

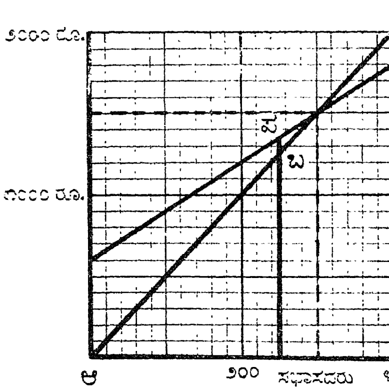


ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೨.

ಏನೆಂದರೆ ದರವು ರೂ. ೫೦. ೧೬ ಆಣೆ ಇದ್ದಾಗ ಖರ್ಚು ೫೫ ರೂ. ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ೧೧೫ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ದರವು ೪ ಆಣೆ ಇರುವದು.

ಉ. ೭. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಭವನದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು, ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೮೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೨೫೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೩೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ತಿಂಗಳಿನ ಚಂದಾ ೧ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ಭವನಕ್ಕೆ ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರದೆಂದು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (೧ = ೨೦೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೧ = ೧೦೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ **ಕಖ** ಈ ರೇಷೆಯು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚಿನ ಆಲೇಖವಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೦೦೦, ಮತ್ತು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ **ಆಖ** ಈ ರೇಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ಆಲೇಖವಿರುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವೋ ಅದು ೩೦೦ ಸಭಾಸದರು ಮತ್ತು ೧೫೦೦ ರೂ. ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕವಿರುವದು. ಇದರ



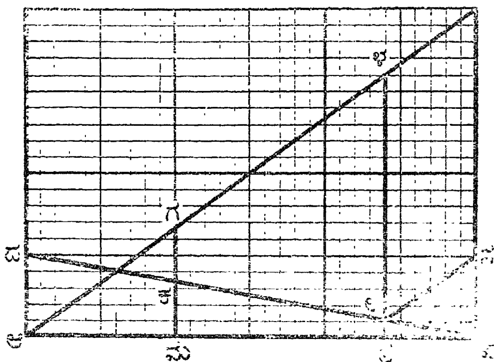
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೩.

ತೋರಿಸುವದೇನೆಂದರೆ ೬೦೦ ಸಭಾಸದರು ಇದ್ದಾಗ ೧೫೦೦ ರೂ., ಖರ್ಚು ತಗಲು-ವದು, ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೂ ಅಷ್ಟೇ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಘಟಕಕ್ಕೆ ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರದೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ೬೦೦ ಸಭಾಸದರು ಇರಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಭಾಸದರಿದ್ದರೆ ಹಾನಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ೩೫೦ ಸಭಾಸದರಿದ್ದಾಗ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ., ಹಾನಿಯನ್ನು ಸಹಿಸಬೇಕಾಗು-ತ್ತದೆ. ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲಿನ **ಪಬ** ಈ ರೇಷೆಯು ಈ ಹಾನಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉ. ೮. ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ದಿನಾಲು ೪ ರೂ., ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರಿನ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ನೇಮಿಸಿದೆ. ಅವನು ಒಂದು ದಿವಸ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೧ ರೂ., ದಂಡವಾಗತಕ್ಕದ್ದು. ೩೦ ದಿನಗಳ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ದಂಡದಹಣ ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ೯೦ ರೂ. ದೊರೆತರೆ, ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಕೆಲಸಕ್ಕಿದ್ದನು ?

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ದಿವಸಗಳನ್ನು (೦.೧" = ೧ ದಿವಸ) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೦.೧" = ೬ ರೂ.) **ಅಪ** ಈ ರೇಷೆಯು ಹೇಗೆ ಅವನು ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಹಾಜರಿದ್ದಷ್ಟನ್ನು ತೋರಿಸು-ತ್ತದೆಯೋ ಅದರಂತೆ **ಪಆ** ಈ ರೇಷೆಯು ಅವನು ೩೦ ದಿವಸಗಳ ವರೆಗೆ ಹಜರ ಇಲ್ಲದೆ ಇರುವದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. **ಆದ** ಈ ರೇಷೆಯು ೩೦ ರೂ. ದಂಡವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು ಮತ್ತು **ಪದ** ಇದು ದಂಡದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. **ಅಮ** ರೇಷೆಯು ಆ ಮನುಷ್ಯನು ದುಡಿದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ **ಮಗ** ರೇಷೆಯು ಅವನು ದುಡಿಯದೇ ಇದ್ದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. **ಮಷ** ಅವನ ಸಂಬಳವಿರುವದು. ಮತ್ತು **ಮಕ** ಇದು ಅವನಿಂದ ವಸೂಲಿ ಆಗ-ತಕ್ಕಂಥ ದಂಡವಿರುವದು ಮತ್ತು **ಕಗ** ಇದು ದಂಡದ ಹಣವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅವನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಹಣವಿರುವದು. ಎರಡು ಆಲೇಖಗಳೊಳಗಿನ ಉದ್ದ ಅಂತರವಿದು ದಂಡವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಆ ಮನುಷ್ಯನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಹಣವು ಇರುವದು. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಆಲೇಖಗಳೊಳಗಿನ ಉದ್ದ ಅಂತರವು, (ಕೋಟಿಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು) ೯೦ ರೂಪಾಗ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡ-

ವೇತನ. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ **ಸವ** ೯೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ **ಸ** ದಿಂದ **ವಲ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆ-



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೪

ದರೆ ಮತ್ತು ಅದು **ಪದ** ಕ್ಕೆ ಲ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ಲಳ = **ಸವ** = ೯೦ ರೂ. ಮತ್ತು ಅತ = ೨೪ ದಿವಸಗಳು. ಆದುದರಿಂದ ಆ ಮನುಷ್ಯನು ೨೪ ದಿವಸಗಳವರೆಗೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಿದನೆಂಬುದು ಉತ್ತರ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

[ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸತಕ್ಕದ್ದಿದೆ.]

೧. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನಿಗೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೨೦ ರೂ. ಸಂಬಳ ಮತ್ತು ಯಾವ ದಿವಸ ಅವನಿಗೆ ದಿನದಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅಂದು ಅವನಿಗೆ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುವವು. ಅವನ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರ ೧೫೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ದಿನಗಳು ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಶಿಲ್ಕು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(ಅ). ೨೫ ದಿವಸ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ಸಿಕ್ಕರೆ ಶಿಲಕು ಎಷ್ಟು ?

(ಆ) ೧೫ ರೂ. ಶಿಲಕು ಇದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ದಿನಗಳೆಷ್ಟು ?

(ಇ) ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದೊಳಗಿಂದ ೧೫ ರೂ. ತೆಗೆಯಬೇಕಾದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸವು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆ ?

(ಈ) ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಇವು ಸರಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ಸಿಗಬೇಕಾಗುವದು ?

೨. ಅಕ್ಕಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಒಂದೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದು ಗೋದಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಎರಡೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದಾಗ ಅಕ್ಕಿ ಮತ್ತು ಗೋದಿ ಇವುಗಳ ವಿನಿಮಯದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೨೦ ಸೇರು ಗೋದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಷ್ಟು ಸೇರು ಅಕ್ಕಿಯನ್ನು, ಮತ್ತು ೧೫ ಸೇರು ಅಕ್ಕಿ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗೋದಿಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಒಂದರಿಂದೊಂದು ೨೧ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳಿಂದ ರಾಮು ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಿಬ್ಬರು ಒಬ್ಬರಿಗೊಬ್ಬರು ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ. ರಾಮುವು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನ ತಾಸಿನ ಸರಾಸರಿ ನಡಿಗೆಯು ೩ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ೫½ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನ ತಾಸಿನ ನಡಿಗೆಯು ೩½ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು, ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿರಿ. ೭½ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವದು ? ೧೩ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆ ಆಗಿರುವದು ?

೪. ವಸಂತನು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ತಾಸುಗಳನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ಪಡೆದು ಮುಂದೆ ೮ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಸಹೋದರನಾದ ಅರವಿಂದನು ಹಿಂದಿನಿಂದ ಮೋಟಾರ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನಿಂದ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರು

ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿರಿ. ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರ ಇರುವದು ? ೧೬ ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿರುವದು ?

೫. ಬಸಪ್ಪನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ನಡಿಗೆಯಿಂದ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಒಂದೂವರೆ ತಾಸುಗಳ ನಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು-ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ಬಿಂದಿಸಿದ ಸಾಯಿಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನಿಗೆ ೧೧ ಗಂಟೆಗೆ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಾನೆ. ಇವರ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸ-ಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ತಾಸಿಗೆ ಯಾವ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆಂಬುದನ್ನೂ, ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರು-ತ್ತದೆಂಬುದನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಎರಡು ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿ-ರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘವು ವ್ಯಾಸದ ೩ ೧/೭ ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂಬುವ ನಿಯಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೧½ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ೩½ ಮತ್ತು ೪½ ಇಂಚು ವ್ಯಾಸಗಳಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಪರಿಘಗಳನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೧೬½ ಇಂ. ೨೨ ಇಂ. ಮತ್ತು ೩೩ ಇಂ. ಪರಿಘಗಳುಳ್ಳ ವರ್ತುಳಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. ಫರನ್‌ಹೀಟ ಉಷ್ಣತಾಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟುವ ಬಿಂದುವು ೩೨° ಮತ್ತು ಕುದಿಯುವ ಬಿಂದುವು ೨೧೨° ಇದ್ದು ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ ಉಷ್ಣತಾ-ಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಅವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೦°, ಮತ್ತು ೧೦೦° ಇರುತ್ತವೆಂಬ ಸಂಗತಿ-ಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಎರಡೂ ಉಷ್ಣತಾಮಾಪಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಉಷ್ಣತಾಮಾನಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ-ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ೬೮°ಫ, ೭೭°ಫ, ೧೪೦ಫ. ಗಳ ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ ಉಷ್ಣತಾಮಾಪಕದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ೧೦ಸೆಂ, ೪೦ಸೆಂ, ೫೦ಸೆಂ, ಗಳ ಫರನ್‌ಹೀಟ-ದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಮಾಡುವವನಿಗೆ ದಿನಾಲು ೨|| ರೂ. ಸಂಬಳ ಕೊಡುವ, ಮತ್ತು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರದೇ ಇದ್ದ ದಿನಕ್ಕೆ ೪ಆ. ದಂಡ, ಈ ಕರಾರಿನ

ಮೇಲೆ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ೪೦ ದಿನಗಳ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ೭೮ ರೂ. ಗಳು ದೊರೆತರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಕೆಲಸದ ಮೇಲಿದ್ದನು ?

೯. ರಾಮನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ೩೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ೬೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುವರು ?

೧೦. ಒಂದು ಹೌದು, ನೀರನ್ನು ಒಳಗೆ ಸುರಿಸುವ ನಳದ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆರೆದರೆ ೧ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ನೀರನ್ನು ಹೊರಗೆ ಬಿಡುವ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆರೆದರೆ ೧½ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತೆರವಾಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ಎರಡೂ ನಳಗಳ ಬಾಯಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದರೆ ಆ ಹೌದು ಎಷ್ಟು ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬುವದು?

೧೧. ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೬೫ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು, ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕವು. ಮೊದಲನೇ ಕ್ರಮಾಂಕದ ಗುಣಗಳು ೯೫ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದು ೩೦ ಇರುವಂತೆ ಬದಲಿಸಬೇಕಾದರೆ, ದೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಗುಣಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಯಾವನಿಗೆ ೩೫ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತಿದ್ದವೋ ಅವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ದೊರೆಯುವವು, ಮತ್ತು ಯಾವನಿಗೆ ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವೋ ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ದೊರೆತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸುವದಕ್ಕೆ ೪೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ತಗಲುತ್ತದೆ, ೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳಿಗೆ ೬೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೫೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳಿಗೆ ೧೨೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ತಗಲುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಣದ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೬೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ತಗಲುವದು ಮತ್ತು ೧೬೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸಿದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ವಸತಿಗೃಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦ ಇದ್ದಾಗ, ೧೨೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೬೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೭೦೦ ರೂ.

ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ೫೫ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾಗ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ೧೪೫೦ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟಿರುವರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ವಸತಿಗೃಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಆಕರಣಿಯು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೨೫ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರದೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರಬೇಕು?

೧೪. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ೮ ಜನರು ಇದ್ದಾಗ ೨೦೦ ರೂ. ಇರುವದು, ೩ ಜನರು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ೨೪೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಒಬ್ಬನು ಬೇರೆ ಊರಿಗೆ ಹೋದಾಗ ೧೮೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೫ ಜನರಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಬರುವದು ಮತ್ತು ೨೮೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬಂದಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಜನರಿದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಒಬ್ಬ ಅಧಿಕಾರಿಯು ತಿಂಗಳಿನ ಪಗಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ನಿಶ್ಚಿತ ಬಢತಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದು ೬ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ೪೮೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ೧೦ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅದು ೬೦೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನೌಕರಿಯ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಅವನ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೪ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಬಳ ದೊರೆಯುವದು, ಮತ್ತು ೬೬೦ ರೂ. ಸಂಬಳ ದೊರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ರತ್ತಲಿಗೆ ೩ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಮತ್ತು ರತ್ತಲಿಗೆ ೩॥ ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಹೀಗೆ ೧೦೦ ರತ್ತಲು ಚಹವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯು ೩೨೦ ರೂ. ಆಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಚಹವನ್ನು ಎಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು?

ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಗಳು

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು

೧. $ಯ^{೫} + ಯ^{೪} - ೧೫ಯ^{೩} - ೨೫ಯ^{೨} + ೧೪ಯ + ಕ$ ಇವಕ್ಕೆ $ಯ - ೪$ ರಿಂದ ನಿಃಶೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ $ಕ = ?$ ಮತ್ತು ರಾಶಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾವುವು ?

೨. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು $೪ಯ^{೫} - ೪ಯ^{೪} - ೭೫ಯ^{೩} + ೧೯೬ಯ^{೨} - ೧೫೯ಯ + ೩೦$ ಇದ್ದು ಅವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ** $೨ಯ - ೧$ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೩. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

(ಅ) $$\frac{ಕ^{೩} + ಗ^{೩} + ಘ^{೩} - ೩ಕಗಘ}{(ಗ - ಘ)^{೨} + (ಘ - ಕ)^{೨} + (ಕ - ಗ)^{೨}}.$$

(ಆ) $$\frac{ಪ^{೪} - ಪ^{೩}ಮ - ಪಮ^{೩} + ಮ^{೪}}{ಪ^{೩} - ಪ^{೨}ಮ - ಪಮ^{೨} + ಮ^{೩}}.$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಅ) $$\frac{ನ + ೧೨}{೫} - ೩\frac{೧}{೪} - \frac{ನ + ೫}{೪} = \frac{ನ}{೩} - \left(ನ + \frac{೧}{೪}\right).$$

(ಆ) $$\frac{೩ಯ + ೨ರ}{೧೨} = \frac{೩ರ - ೨ಯ}{೫} = ೬.$$

೫. ೨೫ ರೂ. ಯ ಆ. ೬ ಪೈಗಳಿರುವ ಚೀಲದೊಳಗಿಂದ ೧೫ ರೂ. $(ಯ + ೪)$ಆ. ೯ ಪೈಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉಳಿಯುವವು ?

೬. $ಪ = ಯ - \frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $ಮ = ಯ^{೨} - \frac{೧}{ಯ^{೨}}$ ಇದ್ದರೆ

$ಮ^{೨} - ೪ಪ^{೨} = ಪ^{೪}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೭. ಆ ಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೫ಕ್ಷ + ೪ಯ = ೨೨,\quad \frac{ಕ್ಷ}{೪} + \frac{ಯ}{೬} = ೧.$$

೮. ಅಂಶದೊಳಗಿಂದ ೩ ಕಳೆದರೆ ಬೆಲೆಯು $\frac{೧}{೬}$ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ ೨ ಕೂಡಿಸಿದರೆ $\frac{೧}{೨}$ ಆಗುವಂಥ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ನೆಯದು

೧. (ಅ) $ಪ + ಬ + ಮ = ೬$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} = ೧೪$ ಇದ್ದರೆ $ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ = ?$

(ಆ) $ಯ + ರ + ಲ = ೦$ ಮತ್ತು $ಯರ + ರಲ + ಲಯ = -೭$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ಲ^{೨} = ?$

೨. $೬ಯ^{೪} - ೩೩ಯ^{೩} - ೧೦ಯ^{೨} - ೭ಯ + ೪೨$ ಇದರೊಳಗಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ $ಯ - ೫$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

(ಅ) $$\left(\frac{೧}{೧-ಯ} - \frac{ಯ}{೧-ಯ^{೨}}\right) \div \left(\frac{೧}{೧+ಯ} + \frac{ಯ}{೧-ಯ^{೨}}\right).$$

(ಆ) $$\frac{೧}{೩ + \frac{೨}{ಯ-೧}} \times \frac{೧}{ಯ - ೨ + \frac{೧}{೨ + \frac{ಯ-೩}{ಯ-೧}}}$$

೪. $೩೨ಯ^{೪} + ೧೦೦ಯ^{೨} - ೩ಯ - ೪೫$ ಮತ್ತು $೩೨ಯ^{೪} + ೮೨ಯ^{೨} - ೫೭ಯ - ೪೫$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಅ) $$\frac{೩ಯ^{೨} - ೭೦}{೫} + \frac{೪ಯ + ೯೦}{೩} = \frac{೯ಯ^{೨} + ೩೦}{೧೫} - \frac{೮ಯ - ೩}{೯}$$

(ಆ) $$\frac{ಯ - ರ}{೪} + \frac{ಯ + ರ}{೫} = ೪೧;\quad \frac{ಯ - ರ}{೫} - \frac{ಯ + ರ}{೬}$$

೬. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) ೬ಯ^{೨} + ೧೩ಯರ + ೬ರ^{೨} — ೫ಯ — ೫ರ — ೬.

(ಬ) (ಯ + ೩)^{೩} + (ಯ — ೫)^{೩} + ೮(೧ — ಯ)^{೩}.

(ಕ) ೬ಪ^{೪} — ೪೨ಪ^{೨} + ೩೬ಪ.

೭. ರಾಮನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ನಡಿಗೆಯಿಂದ ೧೮ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ತರುವಾಯ ೮ ಗಂಟೆಗೆ ಅವನ ತಮ್ಮನಾದ ಗೋಪಾಲನು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅದೇ ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅವರು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಮನೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತಿರುವು ಮುರುವು ಬರೆಯುವದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೧೨೧ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೬೩ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ನೆಯದು

೧. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) ಯ^{೫} + ೩ಯ^{೪} — ೫ಯ^{೩} — ೧೫ಯ^{೨} + ೪ಯ + ೧೨.

(ಬ) (ಯ^{೨} + ಯ + ೨)(ಯ^{೨} + ಯ + ೩) — ೨.

(ಕ) ಪ (ಬ^{೨} — ಮ^{೨}) — ಬ(ಮ^{೨} — ಪ^{೨}) — ಮ(ಪ^{೨} — ಬ^{೨}).

೨. ೪ಯ^{೨} — ೧೬ಯ + ಅ ಮತ್ತು ೭ಯ^{೨} — ೨೪ಯ + ಕ ಇವುಗಳ **ಮ.ಸಾ.ಪ.** ಯ — ೩ ಇದ್ದರೆ ಅ = ? ಕ = ?

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

(ಅ) $$\frac{\left(೧-\frac{ಮ}{ಪ}\right)\left(೧+\frac{ಪ}{ಮ}\right)}{\frac{ಪ}{ಮ}+\frac{ಮ}{ಪ}} \div \frac{\frac{೧}{ಮ^{೨}}+\frac{೧}{ಪ^{೨}}}{\frac{೧}{ಮ^{೨}}+\frac{೧}{ಪ^{೨}}}.$$

(ಆ) $\dfrac{ಪ-ಬ}{ಪ-ಬ-\dfrac{ಪ^{೨}}{ಪ+ಬ}} - \dfrac{ಪ+ಬ}{ಪ+ಬ+\dfrac{ಬ^{೨}}{ಪ-ಬ}}$

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಇ) $\dfrac{೧೦ಯ-೬}{೬} + \dfrac{೨(೧೧ಯ-೧)}{೬}$

$= \dfrac{೧೭೩ಯ+೨೫೦}{೭೦} + \dfrac{೨೦ಯ-೨೫}{೧೨}$

(ಈ) $೧೨\left(\dfrac{೧}{ಯ} - \dfrac{೧}{ರ}\right) = ೧;\ \ ೧೨\left(\dfrac{೧}{ಯ} + \dfrac{೧}{ರ}\right) + ೧೭ = ೦.$

೫. $ಕ+ಗ+ಘ = ೧$, $ಕ^{೨}+ಗ^{೨}+ಘ^{೨} = ೨೧$ ಮತ್ತು $ಕಗಘ = ೮$ ಇದ್ದರೆ $ಕ^{೩}+ಗ^{೩}+ಘ^{೩} = ?$ ಮತ್ತು $(ಕ+ಗ)(ಗ+ಘ)(ಘ+ಕ) = ?$

೬. **ಪರಿಘಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವು ಬರುತ್ತದೆ.** ಈ ನಿಯಮದ ಮೇಲಿಂದ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ (**ಪ**) ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ (**ತ್ರಿ**) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ **ಸೂತ್ರ**ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ೨೧ ಇಂ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು ೨೪೬೪ ಚೌ. ಇಂ. ಪೃಷ್ಠಫಲವುಳ್ಳ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ :

$\left(ಗ = \dfrac{೨೨}{೭} \right)$

೭. ಒಬ್ಬ ಸಾಯಕಲ್‌ಸವಾರನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ **ಅ** ಊರಿನಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ **ಬ** ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ಪ್ರವಾಸದ ನಂತರ ಅರ್ಧತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ೯ ಗಂಟೆಗೆ **ಬ** ಊರಿನಿಂದ **ಅ** ಊರಿನ ಕಡೆಗೆ ಬರಲು ಹೊರಟ ಬೇರೊಬ್ಬ ಪ್ರವಾಸಿಗನು ತಾಸಿಗೆ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಮೋಟಾರಿನಿಂದ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ **ಆಲೇಖ**ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರು ಎಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ೬೦೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಆಕಳುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೫೦ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೬ ಆಕಳುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು ಮತ್ತು ೫೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೪ ಆಕಳುಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕಳಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ ನೆಯದು

೧. ಗುಣಸ್ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $ಬ(ಮ-ಪ)^{೨}-ಮ(ಪ-ಬ)^{೨}-ಪ(ಬ-ಮ)^{೨}$

(ಆ) $ಪ^{೨}-ಬ^{೨}-ಮ^{೨}+೨ಬಮ-ಪ+ಬ+ಮ.$

(ಇ) $\frac{ಯ^{೨}}{ಅ^{೨}}+\frac{ಅ^{೨}}{ಯ^{೨}}+೧.$

೨. $ಯ^{೩}+೫ಯ^{೨}+ಅಯ-೩ಕ$ ಮತ್ತು $ಯ^{೩}-೩ಯ^{೨}+೨೭ಅಯ+೧೪ಕ$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** $ಯ-೨$ ಇದ್ದರೆ, $ಅ=?$ $ಕ=?$

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

(ಅ) $$\left(೧-\frac{೧}{ಯ-೧}\right)\left(ಯ-೨+\frac{೧}{ಯ}\right)\times\frac{\frac{೧}{(ಯ-೨)^{೨}}-ಯ+೨}{೧+\frac{೧}{ಯ-೨}}\div\left(ಯ-೧+\frac{೧}{ಯ-೨}\right).$$

(ಆ) $$\frac{ಯ+ಪ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಮ)}+\frac{ಯ+ಮ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಪ)}-\frac{ಪ-ಮ}{(ಯ+ಪ)(ಯ+ಮ)}$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಅ) $$\frac{೧}{೪}\left(ಸ+\frac{೧}{೮}\right)-\frac{೧}{೩}\left(ಸ-\frac{೪}{೫}\right)=\frac{೧೩}{೪೦}.$$

(ಇ) $\frac{೧೫}{ಯ+ರ} + \frac{೧೩}{ಯ-ರ} = ೧೬;$

$\frac{೯}{ಯ+ರ} - \frac{೩}{ಯ-ರ} = ೧.$

೫. (ಅ) $ಯ + \frac{೧}{ಯ} = ಪ$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^{೪} + \frac{೧}{ಯ^{೪}} =$
$ಪ^{೪} - ೪ಪ^{೨} + ೨$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

(ಆ) $ಯ + \frac{೧}{ಯ} = \frac{೧೦}{೩}$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^{೪} + \frac{೧}{ಯ^{೪}} = ?$

೬. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಅಂತರವು ೫ ಇದ್ದು ಅವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೪೩ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೭. (೦,೫) ಮತ್ತು (೩,−೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯು (೫,೦) ಮತ್ತು (−೭,೩) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೮. ಒಂದು ಊರಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಗೆ ಅದರ ನಿತ್ಯದ ವೇಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವೇಳೆಯು ತಗಲುತ್ತದೆಯೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ೨½ ತಾಸುಗಳು ಕಡಿಮೆ ತಗಲುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ೫ ಮೈಲುಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ನಿತ್ಯದ ವೇಳೆಗಿಂತ ಎರಡು ತಾಸುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಊರೊಳಗಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ ನೆಯದು

೧. **ಪ** ಮತ್ತು **ಬ** ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಅ** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ** ಗಳಿದ್ದು **ಪ + ಬ = ಅ + ಕ** ಇದ್ದರೆ
$ಪ^{೩} + ಬ^{೩} = ಅ^{೩} + ಕ^{೩}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೧೫ಯ^{೩} - ೩೨ಯ^{೨} + ೧೩ಯ + ೪.$

(ಆ) $೮ಯ^೩ + ೧ + \frac{೧}{೨೭ಯ^೩}$.

(ಇ) $ಯರ^೫ - ರಯ^೫$.

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಅ) $\frac{೨}{೩}(೨ಯ - ೫) - \frac{೩}{೮}(೭ಯ + ೫) = \frac{೨}{೭}(೫ಯ + ೩) + \frac{೫}{೪}(೩ಯ - ೫)$.

(ಆ) $(ಯ - ೩)(ರ + ೪) = ಯರ + ೨$; $(ಯ + ೨)(ರ - ೪) = ಯರ - ೨೬$.

೫. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

(ಅ) $\frac{೩}{(ಯ - ೫)(ಯ + ೪)} + \frac{೨}{(ಯ - ೪)(ಯ - ೫)} - \frac{೫}{ಯ^೨ - ೧೬}$.

(ಆ) $\frac{ಪ(ಬ^೨ - ಮ^೨)}{ಬಮ} - \frac{ಬ(ಪ^೨ - ಮ^೨)}{ಪಮ} + \frac{ಮ(ಪ^೨ - ಬ^೨)}{ಪಬ}$.

೬. (ಅ) $ಯ^೪ - (ಅ^೨ - ಕ - ಗ)ಯ^೨ - (ಕ - ಗ)ಅಯ + ಕಗ$ ಕ್ಕೆ $ಯ^೨ + ಅಯ + ಕ$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

(ಆ) $ಯ = ಬ - ಮ$, $ರ = ಮ - ಪ$, $ಸ = ಪ - ಬ$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೨ + ರ^೨ + ಸ^೨ + ಯರ + ರಸ + ಸಯ = ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ಪಬ - ಬಮ - ಮಪ$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೭. ಒಂದು ರಕಮನ್ನು ರಾಮ, ವಿಷ್ಣು, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ರಾಮನಿಗೆ ರಕಮಿನ $\frac{೧}{೨}$ ಪಾಲು ಸಿಕ್ಕು ರಾಮ ಮತ್ತು ವಿಷ್ಣು ಇವರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಕೂಡಿ ೨೦೦ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಮತ್ತು ರಾಮ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಕೂಡಿ ೧೭೫ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಸಿಕ್ಕಿತು ?

೮. ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೩½ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಪ್ರಿಫರೆನ್ಸ ಸರ್ಟಿ-ಫಿಕೇಟುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು, ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೩ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿ ಕೊಡುವ ಪೋಸ್ಟಿನ ಸೇವ್ಹಿಂಗ್ಸ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಬಡ್ಡಿಗಿಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೪೭೪ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವು ಇಡಲಾಯಿತು ?

೮. ಅಲ್ಪೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{ಕ್ಷ}{೨} + \frac{ಯ}{೩} = ೯; \quad \frac{ಕ್ಷ}{೮} + \frac{ಯ}{೫} = ೪.$$

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ ನೆಯದು.

೧. $\frac{ಯ^೩ - ೯ಯ^೨ - ೧೨ಯ + ೧೬೦}{ಯ^೩ + ಯ^೨ - ೨೨ಯ - ೪೦}$ ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨. $ಯ^೪ - ಅಯ^೩ - ಅ^೨ಯ^೨ - ಅ^೩ಯ - ೨ಅ^೪$ ಮತ್ತು $೩ಯ^೩ - ೭ಅಯ^೨ + ೩ಅ^೨ಯ - ೨ಅ^೩$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೪ಯ^೩ - ೧೧ಯ^೨ - ಯ + ೧೪$.

(ಆ) $೮ಯ^೨ - ರ^೨ - ೨೭ಲ^೨ - ೧೫ಯರ೬$.

(ಇ) $ಯ^೨ + ೨ಯರ + ರ^೨ + ೩ಯ + ೩ರ - ೪೦$.

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

(ಅ) $\frac{೫ಯ - ೧}{೬} = \frac{೯ರ + ೩ಲ}{೫} = \frac{೭೯ - ೭ಯ}{೧೧}$

(ಆ) $\frac{೫}{ಯ} - \frac{೩}{ರ} = ೧; \quad \frac{೨೫}{ಯ} - \frac{೧೩}{ರ} - ೧೧ = ೦.$

೫. **ದ** ಮತ್ತು **ನ** ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಅ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ ಇದ್ದು $ದ - ನ = ಮಅ - \frac{ಕ}{ಮ}$ ಇದ್ದರೆ $ದ^೨ - ನ^೨ = ಮ^೨ಅ^೨ - \frac{ಕ^೨}{ಮ^೨}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$\frac{(ಯ - ಪ)^೨}{(ಮ - ಪ)(ಪ - ಬ)} + \frac{(ಯ - ಬ)^೨}{(ಪ - ಬ)(ಬ - ಮ)} - \frac{(ಯ - ಮ)^೨}{(ಬ - ಮ)(ಮ - ಪ)}$$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೭. ತಮ್ಮಣ್ಣ ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನೌಕರಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ತಮ್ಮಣ್ಣನ ಪ್ರಾರಂಭದ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ೧೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೧೦ ರೂ. ಬಢತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ., ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪನ ಪ್ರಾರಂಭದ ಸಂಬಳವು ೧೪೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೫ ರೂ. ಬಢತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅವರ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ (ವ) ಮತ್ತು ನೌಕರಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾದ ವರ್ಷಗಳು (ಕ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ **ಸೂತ್ರ**ಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂಬಳಗಳ **ಆಲೇಖ**-ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ವರ್ಷ ಅವರಿಬ್ಬರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ಅಷ್ಟೇ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲು-ಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ೨೦ ಮಿ. ಗಳ ವರೆಗೆ ನಿಂತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದ ಕೆಲವು ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಮೈಲನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ತಿರುಗಿ ಬಂದಾಗ ೯ ಗಂಟೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧. ಪು. ೫, ೬.

೧. ೪ಸ೨. ೨. ೬೪ಯ೨. ೩. ೪ಪ೨. ೪. ೮೧ಕ೨—೭೨ಕಫ+೧೬ಫ೨. ೫. ೬೪ಕ೨. ೬. ೬೪. ೭ ೧೧೫೬. ೮. ೨೨೫. ೯. ೧೦೬. ೧೦. ೧. ೧೧ ೪. ೧೨. ೩೬.:೧೭. ೪೭. ೧೮. ೬೬. ೧೯. ೧೬. ೨೦. ೮.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨. ಪು. ೧೧, ೧೨.

೧ ೯;೧೦ರ+೩. ೨. ೪೯;೧೨ಸ-೭. ೩. ೪೯ಅ೨; ೧೩ಪ ೭೫. ೪. ೯ಅ೨; ೧೪ಪ—೩೮. ೫. ೪;೨ಕ್ಷ+೫. ೬. ೯;೩ಕ್ಷ—೨. ೭. ೯ಪ೨:೩ಪ+೫ಮ. ೮. ೧೬ಪ೨;೪ಪ+೭ಮ. ೯. ೧೪೦ಯರ;೭ಯ+೧೦ರ. ೧೦. ೧೬ಯಕ್ಷ; ೮ಯ+ಕ್ಷ. ೧೧. ೩೬ಯ೨ರ೨;೯ಯ೨+೨ರ೨. ೨೨. ೧೧೬ಕ:೭—೧ಕ. ೧೩. ೪೨೦ಯ;೭ಯ-೩೦. ೧೪. ೧೨ಅಕಕ್ಷ:೨ಅಕ-೩ಕ್ಷ. ೧೫. ೪೦ಅಕಗಫ; ೪ಅಕ—೫ಗಫ. ೧೬. ೧೨೬ಅಕಗ:೯—೭ಅಕಗ. ೧೭. ೨೮,೩ಯ:೫೨+೨, ೪ಯ—೩. ೧೮. ೯ಯ೨ರ೨:೩ಯ೨+೨ರ೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩. ಪು. ೧೫, ೧೬.

೧ ೩೬ತ೨ — ೧೨ತದ+ದ೨ — ೨೬ತ + ೬ದ+೯. ೨. ಯ೨+ ೧೬ರ೨+೯ಲ೨—೮ಯರ+೬ಯಲ—೨೪ರಲ. ೩. ೬೪ಯ೨+೯ರ೨+ ೪ಲ೨ + ೪೮ಯರ + ೩೨ಯಲ + ೧೨ರಲ. ೪. ೨೫ಕ೨ + ೪ಗ೨+ ೨೫ಫ೨ — ೨೦ಕಗ + ೫೦ಕಫ — ೨೦ಗಫ. ೫. ೧೬ಪ೨ —೧೬ಪಬ+ ೪ಬ೨ — ೪೦ಪ + ೨೦ಬ + ೨೫. ೬. ೪ಯ೨ + ೯ರ೨ — ೧೬ಲ೨ — ೧೨ಯರ + ೨ಯಲ — ೩ರಲ. ೭. ೧೬ಕ೨ + ೧೬ಗ೨ + ೩೬ಫ೨ + ೩೬ಕಗ — ೪೮ಕಫ—೪ಗಫ. ೮. ೧೬/೯ತ೨+೧೦೦ದ೨+೧೬ದ೨—೪ತದ—೧/೩ತದ+೧೦ದದ. ೯. ೨೫ಕ೪+೯ಗ೨+ಫ೪—೩೦ಕ೨ಗ—೧೦ಕ೨ಫ೨+೬ಗಫ೨. ೧೦. ಕ೪—೪ಕ೩ಗ+೧೦ಕ೨ಗ೨—೧೨ಕಗ೩+೯ಗ೪. ೧೧. ಯ೬ — ೪ಯ೫ — ೬ಯ೪ + ೨೦ಯ೩ + ೨೫ಯ೨. ೧೨. ೧/೪ಯ೪ — ೬ಯ೩ರ + ೩೬೧/೪ಯ೨ರ೨—೪ಯರ೩+೧/೪ರ೪. ೧೩. ೨೫ಕ೪ ೬೦ಕ೩+ ೧೬ಕ೨+೨೪ಕ+೪. ೧೪. ೯ಪ೨—೩೦ಪ+೨೩+ $\frac{೧೦}{೩ಪ}$ + $\frac{೧}{೯ಪ೨}$.

೧೫. $\frac{೪}{ಕ^೨} + \frac{೯}{ಗ^೨} + \frac{೨೫}{ಷ^೨} - \frac{೧೨}{ಕಗ} - \frac{೨೦}{ಕಷ} + \frac{೩೦}{ಗಷ}$

೧೬. $\frac{೨೫}{ಮ^೨ರ^೨} + \frac{೪}{ರ^೨ಲ^೨} + \frac{೪೯}{ಲ^೨ಮ^೨} - \frac{೨೦}{ಮರ^೨ಲ} - \frac{೭೦}{ಮ^೨ರಲ} + \frac{೨೮}{ಮರಲ^೨}$. ೧೭. $\frac{ತ^೨}{ದ^೨} + \frac{ದ^೨}{ನ^೨} + \frac{ನ^೨}{ತ^೨} + \frac{೨ತ}{ನ} - \frac{೨ದ}{ತ} - \frac{೨ನ}{ದ}$. ೧೮. $\frac{೧೬ತ^೨}{೨೫ದ^೨} + \frac{೧೦೦ದ^೨}{೯ನ^೨} + \frac{೮೧ನ^೨}{೪ತ^೨} - \frac{೧೬ತ}{೩ನ} + \frac{೩೦ದ}{ತ} - \frac{೩೬ನ}{೫ದ}$. ೧೯. ೩ಪ − ೨ಬ + $\frac{೧}{೨}$ ಮ.

೨೦. ೨ಕ² + ೪ಕ − ೩. ೨೧. ೪ಯ² − ೩ಯರ + ೫ರ².

ಬಿಡಬಿಡಿಯಲ್ಲಿ ತಿರಬದ್ದ ಸ್ಥಾನಗಳು:— ೨೨. − ೩ರ. ೨೩. ೩ಯ − ೮. ೨೪. − ೩ಬ − ೨ಮ. ೨೫. ೩ಕ + ೯. ೨೬. ೦. ೩೪. ೯. ೨೭. [illegible]

೨೮. ತ⁴ − ೧೨ತ³ದ + ೫೪ತ²ದ² − ೧೦೮ತದ³ + ೮೧ದ⁴.

೨೯. ೬೨೫ನ⁴ + ೧೦೦೦ನ³ಮ + ೬೦೦ನ²ಮ² + ೧೬೦ನಮ³ + ೧೬ಮ⁴.

೩೦. ಯ⁴ − ಯ² + ೬ − $\frac{೪}{ಯ^೨} + \frac{೧}{ಯ^೪}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪. ಪು. ೧೮, ೧೯.

೧. ೧೬. ೨. ೩೮. ೩. ೧೪. ೪. ೪೫. ೫. ೧೧. ೬. ೧. ೭. [illegible] ೮. ೯ಪ². ೯. ೦

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೫. ಪು. ೨೦.

೧. ತ² + ದ² + ಥ² + ನ² − ೨ತದ + ೨ತಥ − ೨ತನ − ೨ದಥ + ೨ದನ − ೨ಥನ. ೨. ೯ಪ² + ೧೬ಬ² + ಫ² + ಮ² − ೨೪ಪಬ − ೬ಪಫ − ೬ಪಮ + ೮ಬಫ + ೮ಬಮ + ೨ಫಮ. ೩. ೪ಪ² − ೧೬ಪಮ + ೧೬ಮ² − ೨೦ + $\frac{೮೦}{ಮ} + \frac{೮ಮ}{ಪ} + \frac{೧}{ಪ^೨} - \frac{೪}{ಪಮ} + \frac{೪}{ಮ^೨}$. ೪. ೨ಯ² − ರ² + −ಲ² − ೧೦ಯರ − ೬ರಲ + ೩೦ಲಯ − ೧೦ಯ + ೩ರ − ೬ಲ + ೧.

೫. $ಪ^{೬} - ೬ಪ^{೫}ಮ + ೧೫ಪ^{೪}ಮ^{೨} - ೨೦ಪ^{೩}ಮ^{೩} + ೧೫ಪ^{೨}ಮ^{೪} - ೬ಪಮ^{೫} + ಮ^{೬}$. ೬. $೬೪ಯ^{೬} - ೧೯೨ಯ^{೫}ರ + ೨೪೦ಯ^{೪}ರ^{೨} + ೧೬೦ಯ^{೩}ರ^{೩} + ೬೦ಯ^{೨}ರ^{೪} + ೧೨ಯರ^{೫} + ರ^{೬}$. ೭. $ತ್ರ^{೬} - ೧೮ತ್ರ^{೫}ಸ + ೧೩೫ತ್ರ^{೪}ಸ^{೨} - ೫೪೦ತ್ರ^{೩}ಸ^{೩} + ೧೨೧೫ತ್ರ^{೨}ಸ^{೪} - ೧೪೫೮ತ್ರಸ^{೫} + ೭೨೯ಸ^{೬}$. ೮. $೭೨೯ಯ^{೬} + ೨೯೧೬ಯ^{೫}ಲ + ೪೮೬೦ಯ^{೪}ಲ^{೨} + ೪೩೨೦ಯ^{೩}ಲ^{೩} + ೨೧೬೦ಯ^{೨}ಲ^{೪} + ೫೭೬ಯಲ^{೫} - ೬೪ಲ^{೬}$. ೯. $೬೪ರ^{೬} - ೫೭೬ರ^{೫}ಸ + ೨೧೬೦ರ^{೪}ಸ^{೨} + ೪೩೨೦ರ^{೩}ಸ^{೩} + ೪೮೬೦ರ^{೨}ಸ^{೪} - ೨೯೧೬ರಸ^{೫} + ೭೨೯ಸ^{೬}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಪು. ೨೫.

೧. $೧೬ಯ^{೨} - ರ^{೨} + ೧೦ರಲ - ೨೫ಲ^{೨}$. ೨. $೪ಮ^{೨} - ೬೪ಪ^{೨} + ೪೮ಪಬ - ೯ಬ^{೨}$. ೩. $೪ಗ^{೨} - ೨೪ಗಘ + ೩೬ಘ^{೨} - ೮೧ಕ^{೨}$. ೪. $೪ಕ^{೨} - ೨೫ಗ^{೨} + ೩೦ಗ - ೯$. ೫. $ಕ್ರ^{೨} + ೧ + \frac{೧}{ಕ್ರ^{೨}}$. ೬. $೨೫ಲ^{೪} + ೩೧ಲ^{೨}ಸ^{೨} + ೧೬ಸ^{೪}$. ೭. $೧೬ಪ^{೨} - ೪೪ಪಮ + ೯ಮ^{೨} - ೪ಬ^{೨} + ೨೮ಬಭ - ೪೯ಭ^{೨}$. ೮. $೪ತ್ರ^{೨} - ೨೫ದ^{೨} + ೩೬ಧ^{೨} + ೯ನ^{೨} - ೨೪ತ್ರಧ - ೩೬ಧನ + ೧೨ನತ್ರ$ ೯. $ಕ್ರ^{೮} + ಕ್ರ^{೪} + ೧$. ೧೦. $೧ + ೧೬ಪ^{೪} + ೨೫೬ಪ^{೮}$. ೧೧. $೨೫೬ಯ^{೧೬} - ರ^{೧೬}$. ೧೨. ೯೮೦೪. ೧೩. ೬೩೯೩೭೫. ೧೪. ೨೫೫೯೯೯೯.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಪು ೨೯, ೩೦.

೧. $೨೭ಯ^{೩} + ೫೪ಯ^{೨} + ೩೬ಯ + ೮$. ೨. $೫೧೨ರ^{೩} - ೫೭೬ರ^{೨} + ೨೧೬ರ - ೨೭$. ೩. $೨೭ಯ^{೩} + ೧೦೮ಯ^{೨}ಕ್ಷ + ೧೪೪ಯಕ್ಷ^{೨} + ೬೪ಕ್ಷ^{೩}$. ೪. $ಪ^{೩} + ೮ಬ^{೩} + ೨೭ಮ^{೩} + ೬ಪ^{೨}ಬ + ೧೨ಪಬ^{೨} + ೩೬ಬ^{೨}ಮ + ೫೪ಬಮ^{೨} + ೨೭ಮ^{೨}ಪ + ೯ಮಪ^{೨} + ೩೬ಪಬಮ$. ೫. $೨೭ಪ^{೩} - ಬ^{೩} - ೬೪ಮ^{೩} - ೨೭ಪ^{೨}ಬ - ೯ಪಬ^{೨} - ೧೨ಬ^{೨}ಮ - ೪೮ಬಮ^{೨} + ೧೪೪ಮ^{೨}ಪ - ೧೦೮ಮಪ^{೨} + ೭೨ಪಬಮ$. ೬. $೧೨೫ಯ^{೩} - ೮ರ^{೩} + ೨೭ಸ^{೩} - ೧೫೦ಯ^{೨}ರ + ೬೦ಯರ^{೨} + ೩೬ರ^{೨}ಸ - ೫೪ರಸ^{೨} + ೧೩೫ಸ^{೨}ಯ + ೨೨೫ಸಯ^{೨} - ೧೮೦ಯರಸ$. ೭. $ಪ^{೬} - ೩ಪ^{೫} + ೫ಪ^{೩} - ೩ಪ - ೧$. ೮. $ಪ^{೬} + ೩ಪ^{೫}ಮ + ೬ಪ^{೪}ಮ^{೨} - ೭ಪ^{೩}ಮ^{೩} + ೬ಪ^{೨}ಮ^{೪} + ೩ಪಮ^{೫} + ಮ^{೬}$. ೯. $೨೭ಯ^{೬} + ೫೪ಯ^{೫} - ೬೩ಯ^{೪} + ೪೪ಯ^{೩} + ೨೧ಯ^{೨} +$ [illegible]

೩ಮನ^{೨} — ನ^{೩}. ೧೧. — ಸ^{೩} — ೩ಸ^{೨}ಮ — ೩ಸಮ^{೨} — ಮ^{೩}. ೧೨. — ೮ನ^{೩} — ೮೪ನ^{೨}ಮ — ೨೯೪ನಮ^{೨} — ೩೪೩ಮ^{೩}. ೧೩. ೮ರ^{೩} + ೨೪ರ^{೨}ಸ + ೨೪ರಸ^{೨} + ೮ಸ^{೩}. ೧೪. ೮ಅ^{೩} — ೧೨೦ಅ^{೨} + ೬೦೦ಅ — ೧೦೦೦. ೧೫. ೩೫. ೧೬. $\frac{೧}{೪}$. ೧೭. —೯. ೧೮. —೨. ೧೯. ೨೬$\frac{೨೬}{೨೭}$. ೨೦. —೭$\frac{೭}{೮}$. ೨೧. ೦. ೨೨. ೧. ೨೩. ೦. ೨೪. ೧೨೫. ೨೭. ೨೭. ೨೮. —೬೪.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೮. ಪು. ೩೩, ೩೪.

೧. ಯ^{೩} + ೧೬ಯ^{೨} + ೭೯ಯ + ೧೨೦. ೨. ಲ^{೩} — ೧೦ಲ^{೨} + ೩ಲ + ೧೨೬. ೩. ಪ^{೩} — ೨೧ಪ^{೨} + ೧೩೪ಪ — ೨೪೦. ೪. ೩೫೦ — ೧೫೫ಮ + ೨೨ಮ^{೨} — ಮ^{೩}. ೫. ೧೭೫ + ೨೫ಅ — ೧೨೦ಅ^{೨} + ೩೬ಅ^{೩}. ೬. ಅ^{೪} + ೬೦ಅ^{೨} + ೧೪೨ಅ + ೧೦೫. ೭. ೫೧೨ರ^{೩} — ೬೪ರ^{೨} — ೧೩೬ರ — ೧೫. ೮. ೨೭ರ^{೩} + ೩೬ಅರ^{೨} — ೯೩ಅ^{೨}ರ — ೭೦ಅ^{೩}. ೯. ೧೨೫ಯ^{೩} + ೧೬೫ಅಯ^{೨} + ೭೦ಅ^{೨}ಯ — ೮ಅ^{೩}. ೧೦. ೧೪ಅ^{೪} + ೩೯ಅ^{೨}ಪ + ೯೦ಅಪ^{೨} + ೨೭ಪ^{೩}. ೧೧. ೫೬೮ — ೧೦೨ಯ — ೭೧ಯ^{೨}. ೧೨. ೪ರ^{೨} — ೨೪ರ — ೬೪. ೧೩. — ೪೨ಪ — ೨೧೦. ೧೪. — ೮ಸ^{೨} + ೨೪ಸ — ೧೦. ೧೫. ೯(೨ — ೩ಸ). ೧೬. ೧೦(೫ಸ — ೧೨).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೯. ಪು. ೩೮, ೩೯.

೧. (ಬ + ೩ಮ — ೯)(ಬ — ೩ಮ — ೯). ೨. (೨ಅ + ೫ಕ + ೭)(೨ಅ — ೫ಕ + ೭). ೩. (೫ಅ — ೭ಕ + ೨ಗ — ಫ)(೫ಅ — ೨ಕ — ೨ಗ + ಫ). ೪. (ಅ^{೨} + ೨ಅಕ + ೨ಕ^{೨})(ಅ^{೨} — ೨ಅಕ + ೨ಕ^{೨}). ೫. (೯ಪ^{೨} + ೧೨ಪಮ + ೮ಮ^{೨})(೯ಪ^{೨} — ೧೨ಪಮ + ೮ಮ^{೨}). ೬. (೧೮ರ^{೨} + ೩೦ರಸ + ೨೫ಸ^{೨})(೧೮ರ^{೨} — ೩೦ರಸ + ೨೫ಸ^{೨}). ೭. (ಯ^{೨} + ಯ — ೧)(ಯ^{೨} — ಯ — ೧). ೮. (ಪ^{೨} + ೩ಪಮ — ಮ^{೨})(ಪ^{೨} — ೩ಪಮ — ಮ^{೨}) ೯. (ಯ — ರ)(ಯ + ರ)(೩ಯ — ೨ರ)(೩ಯ + ೨ರ) ೧೦. (೮ಮ^{೨} + ೫ಮಯ + ೩ಯ^{೨})(೮ಮ^{೨} — ೫ಮಯ + ೩ಯ^{೨}). ೧೧. (೯ಪ^{೨} + ೭ಪಮ — ೨ಮ^{೨})(೯ಪ^{೨} — ೭ಪಮ — ೨ಮ^{೨}) ೧೨. ೪(ಯ + ೨ರ + ೪)(ಯ — ೨ರ + ೧). ೧೩. (೫ನ + ೩ಮ — ೩)(೫ನ — ೩ಮ — ೧). ೧೪. (೨ರ + ಸ + ೨)(೭ರ — ಸ — ೮). ೧೫. (ಯ + ರ + ೬ — ವ)(ಯ + ರ — ೮ + ವ).

೧೬. (೨ತ − ೫ದ + ೩ಸ − ೪)(೨ತ − ೫ದ − ೩ಸ + ೪).
೧೭. (೫ಜ + ೫ಕ − ೪ಗ)(೫ಜ − ಕ + ೪ಗ). ೧೮. (೨ಪ + ಬ + ಮ)
(೨ಪ + ಬ − ಮ)(೨ಪ − ಬ + ಮ)(ಬ + ಮ − ೨ಪ). ೧೯.
(೮ಯ − ೭ರ + ೮)(೨ಯ + ೨ರ − ೮). ೨೦. (೪ಯ + ೭)(೪ಯ + ೯).
೨೧. (೩ಪ − ೧೧)(೭ಪ + ೨). ೨೨. ೨(೨ಅ − ಕ)(೨ಅ + ಕ)(೨ಅ + ೩ಕ)
(೩ಕ − ೨ಅ). ೨೩. ೨(೭ಯ − ೩ರ)(೧೭ಯ − ೧೮ರ + ೧)
(೧೭ಯ − ೧೮ರ − ೧). ೨೪. (೪ಅ + ೩)(೪ಅ + ೧)(೪ಅ − ೧).
೨೫. (ನ + ೧)(೨ನ − ೧)^{೨}.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦. ಪು. ೪೧, ೪೨.

೧. (೫ಕ − ೪)(೫ಕ − ೧)(೫ಕ + ೨). ೨. (೨ − ಪ)(೨ − ೩ಪ)(೨ − ೯ಪ).
೩ (ಕ − ೪)(ಕ − ೨)(ಕ + ೩). ೪. (ನ − ೬)(ನ − ೫)(ನ − ೩). ೫. (೪ಯ − ೩)
(೪ಯ + ೧)(೪ಯ + ೭). ೬. (೨ರ − ೧)(೩ರ − ೧)(೪ರ − ೧). ೭. (ರ + ೪)
(ರ − ೪)^{೨}. ೮. (೩ಅ + ೪)(೩ಅ − ೨)^{೨}. ೯. (ಮ − ೩)(ಮ + ೪)(ಮ + ೧೨).
೧೦. (ಅ + ೩)(ಅ − ೬)^{೨}. ೧೧. (೨ಪ + ೩)(೪ಪ^{೨} − ೨ಪ + ೩). ೧೨.
(೩ಸ − ೨)(೩ಸ + ೪)^{೨}. ೧೩. ೨ಕ(೩ಅ^{೨} + ಕ^{೨}). ೧೪. (ಅ + ಕ)(೭ಅ^{೨} −
೧೩ಅಕ + ೭ಕ^{೨}). ೧೫. ೨(೩ದ + ನ)(೯ದ^{೨} + ೬ದನ + ೧೩ನ^{೨}). ೧೬.
೩(ಯ + ರ)(೩ಯ^{೨} + ಯರ + ರ^{೨}). ೧೭. (೨ಜ − ೩ಜ)(೨ಜ + ೩ಜ)
(೪ಜ^{೨} + ೬ಜಜ + ೯ಜ^{೨})(೪ಜ^{೨} − ೬ಜಜ + ೯ಜ^{೨}). ೧೮. (ಅ − ಕ)(ಅ + ಕ)
(ಅ^{೨} + ಕ^{೨})(ಅ^{೨} − ಅಕ + ಕ^{೨})(ಅ^{೨} + ಅಕ + ಕ^{೨})(ಅ^{೪} − ಅ^{೨}ಕ^{೨} + ಕ^{೪}).
(೧೯. ಪ^{೨}ಮ^{೨}(೭ಪ − ೪ಮ)(೪೯ಪ^{೨} + ೨೮ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨}). ೨೦.
(೮ಅ − ೫ಕ^{೨})(೬೪ಅ^{೨} + ೪೦ಅಕ^{೨} + ೨೫ಕ^{೪}). ೨೧. ಪ(ಪ + ೬)
(ಪ^{೨} + ೩ಪ + ೯)(ಪ^{೨} + ೯ಪ + ೨೭). ೨೨. ನ(ನ − ೧)^{೨}(ನ + ೧)
(ನ^{೨} + ನ + ೨). ೨೩. ೦. ೨೪. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೧. ಪು. ೪೫.

೧ (೮ + ೪)(೮ + ೭)(೮^{೨} + ೧೧೮ + ೨೦. ೨. (ಪ − ೫)^{೨}
(ಪ^{೨} − ೧೦ಪ + ೧೨). ೩. (ಜ − ೩)(ಜ + ೬)(ಜ^{೨} + ೩ಜ − ೩೦
೪. (ಪ + ೨)(ಪ + ೩)(ಪ^{೨} + ೫ಪ − ೧೨). ೫. (ಗ − ೧)(೨ಗ +

(೩ಗ^2 − ೨ಗ − ೪). ೬. ೩೨(ಯ^2 + ಯ − ೧)(೮ಯ^2 + ೮ಯ − ೫). ೭. (ಯ − ಸ)(ಯ + ೫ಸ^2)(ಯ + ೪ಸಯ − ೭ಸ^2). ೮. ೮(೨ರ^2 − ೧೦ಸರ + ೫ಸ^2)(ರ^2 − ೫ಸರ + ೫ಸ^2). ೯. ೩(೩ರ^2 − ೩ಕರ − ೫ಕ^2)(೯ರ^2 − ೯ಕರ + ಕ^2).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨. ಪು. ೪೮, ೪೯.

೧. (ಅ + ಕ − ಗ)(ಅ^2 + ಕ^2 + ಗ^2 − ಅಕ + ಕಗ + ಗಅ). ೨. (ತ − ದ − ನ)(ತ^2 + ದ^2 + ನ^2 + ತದ − ದನ + ನತ). ೩. (ಯ + ೨ರ + ಲ)(ಯ^2 + ೪ರ^2 + ಲ^2 − ೨ಯರ − ೨ರಲ − ಲಯ). ೪. (೨ಯ + ೩ರ + ೫ಲ)(೪ಯ^2 + ೯ರ^2 + ೨೫ಲ^2 − ೬ಯರ − ೧೫ರಲ − ೧೦ಲಯ). ೫. (೪ತ − ದ + ೨ನ)(೧೬ತ^2 + ದ^2 + ೪ನ^2 + ೪ತದ + ೨ದನ − ೮ನತ). ೬. (೫ಕ − ೨ಗ − ಘ)(೨೫ಕ^2 + ೪ಗ^2 + ಘ^2 + ೧೦ಕಗ − ೨ಗಘ + ೫ಘಕ). ೭. (೨ಅ + ೩ಕ − ೧)(೪ಅ^2 − ೬ಅಕ + ೯ಕ^2 + ೨ಅ + ೩ಕ + ೧). ೮. (೪ಅ − ೫ಕ − ೨)(೧೬ಅ^2 + ೨೦ಅಕ + ೨೫ಕ^2 + ೮ಅ − ೧೦ಕ + ೪). ೯. (೨ಪ^2 + ೩ಪ − ೪)(೪ಪ^4 − ೬ಪ^3 + ೧೭ಪ^2 + ೧೨ಪ + ೧೬). ೧೦. (ಯ^2 − ೨ಯ + ೫)(ಯ^4 + ೨ಯ^3 − ಯ^2 + ೧೦ಯ + ೨೫). ೧೧. (ಯ − ರ + $\frac{1}{2}$ಸ)(ಯ^2 + ರ^2 + $\frac{1}{4}$ಸ^2 + ಯರ + $\frac{1}{2}$ರಸ − $\frac{1}{2}$ಸಯ). ೧೨. (೨ಪ − $\frac{1}{3}$ಬ − $\frac{2}{3}$ಮ)(೪ಪ^2 + $\frac{1}{9}$ಬ^2 + $\frac{4}{9}$ಮ^2 + $\frac{2}{3}$ಪಬ − $\frac{2}{9}$ಬಮ + ಮಪ).

೧೩. $\left(ಕ - ೨ + \frac{೧}{ಕ}\right)\left(ಕ^2 + ೨ಕ + ೩ + \frac{೨}{ಕ} + \frac{೧}{ಕ^2}\right)$.

೧೪. $\left(ಪ + ೫ + \frac{೨}{ಪ}\right)\left(ಪ^2 - ೫ಪ + ೨೩ - \frac{೧೦}{ಪ} + \frac{೪}{ಪ^2}\right)$.

೧೫. $\left(೨ಪ - ೨ - \frac{೩}{ಪ}\right)\left(೪ಪ^2 + ೪ಪ + ೧೦ - \frac{೬}{ಪ} + \frac{೯}{ಪ^2}\right)$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩. ಪು. ೫೩.

೧. ೧. ೨. ೫೧. ೩. −೨೬೮. ೪. ೨೩೯. ೫. ೧೩೧. ೬. ೨೬. ೭. −೧೩೪. ೮. ೬. ೯. ೧೫೪. ೧೦. −೨೨೩.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪. **ಪು. ೫೭.**

೧. (ಯ+೨)(ಯ−೬)(ಯ−೪). ೨. (ವ−೩)(೨ವ−೩)(೨ವ+೧
೩. (ಕ್ಷ−೩)(ಕ್ಷ−೨)(೩ಕ್ಷ−೧). ೪. ೨೦; (ವ−೪)(ವ−೫)(ವ+೬
೫. −೪; (ಯ+೪)(ಯ+೩)(ಯ−೨). ೬. ೧೫; (ರ−೫)(೨ರ+೧
(೨ರ+೫). ೭. −೧೦೪. ೮. ೦. ೯. −೮೭, −೨೮. ೧೦. ೯
−೧೮. ೧೧. −೧, ೧೩೩. ೧೨. ೨, −೨೩.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೫. **ಪು. ೬೪, ೬೫.**

೧. (ರ−೧)(ರ−೫)(ರ+೮). ೨. (ಲ+೧)(ಲ+೫)(ಲ+೭)
೩. (ಅ−೧)(೨ಅ+೫)(೩ಅ−೨). ೪. (ಪ+೧)(೩ಪ−೧)(೪ಪ+೫)
೫. (ರ−೧)^2(೪ರ+೧). ೬. (ರ+೧)^2(೬ರ+೭). ೭. (ಕ್ಷ−೧)
(ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೫). ೮. (ಅ−೧)^2(೫ಅ−೪)(೫ಅ+೪).
೯. (ಯ−೧)(ಯ+೧)(೩ಯ−೧)(೫ಯ+೪). ೧೦. (ಅ−೧)^2
(೨ಅ−೧)(೩ಅ+೧೦). ೧೧. (ಕ್ಷ−೧)(ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ−೨)^2. ೧೨.
(ಕ್ಷ+೪)(ಕ್ಷ−೫)^2. ೧೩. (ಯ−೧)(ಯ−೨)(ಯ−೩)(ಯ−೪).
೧೪. (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ−೩)(ಕ್ಷ−೫). ೧೫. (೨ನ−೧)(ನ+೩)^2.
೧೬. (ಯ−೩)(೨ಯ+೩)^2. ೧೭. (ನ+೫)(೨ನ−೫)^2.
೧೮. (ಕ್ಷ−೨)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ−೨). ೧೯. ೭, −೧೮.
೨೦. ೧೭, −೨. ೨೧. ೬, ೨. ೨೨. ೬, ೨೪. ೨೩. ೩, −೩.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೬. **ಪು. ೭೫.**

೧. (ಯ−ರ)(ರ−ಲ)(ಯ−ಲ). ೨. (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)
(ಮ+ಪ). ೩. (ತ−ದ)(ದ−ನ)(ನ−ತ). ೪. (ಪ−ಮ)(ಯ−ಪ)
(ಯ−ಮ). ೫. (ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ). ೬. (ಪ+ಬ)
(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ). ೭. (ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)(ಮ−ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ).
೮. (ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)(ಪ−ಮ)(ಪ+ಬ+ಮ). ೯. (ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)
(ಪ−ಮ)(ಪ+ಬ+ಮ). ೧೦. (ಯ+ರ)(ರ−ಲ)(ಯ−ಲ)
(ಯ^2+ರ^2+ಲ^2+ಯರ+ರಲ+ಲಯ). ೧೧. (ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)
(ಮ−ಪ)(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ). ೧೨. ೩ಯರಲ(ಯ−ರ)(ರ−ಲ)

(ಲ − ಯ) ೧೩. ೩(ಯ − ರ)(ಯ + ರ)(ರ − ಲ)(ರ + ಲ)(ಲ − ಯ)(ಲ + ಯ). ೧೪. (ಯ + ರ + ಲ)(ಯರ + ರಲ + ಲಯ)

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೭. **ಪು. ೭೯.**

೧. ೨ಅ^{೨}ಕವ^{೩}; ೭೦ಅ^{೨}ಕ^{೪}ವ^{೭}. ೨. ೪ಅಪವ; ೪೦ಅ^{೨}ಕ^{೨}ಪ^{೨}ವ^{೫}. ೩. ಯ^{೨}ರ^{೨}ಕ್ಷ; ೫೪೦ಯ^{೫}ರ^{೩}ಲ^{೪}ಕ್ಷ^{೨}. ೪. ೫ರ^{೨}ಲ^{೨}; ೧೭೫ಅ^{೨}ಯ^{೨}ರ^{೪}ಲ^{೪}. ೫. ೧೧ಗ^{೪}ಫ^{೨}; ೬೬ಅ^{೨}ಕ^{೨}ಗ^{೫}ಫ^{೨}ಮ. ೬. ಪ^{೨}ಯಕ್ಷ^{೨}; ೨೨೧ಅಕಪ^{೪}ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೫}. ೭. ೮ಪ^{೨}ಸ^{೪}ಕ್ಷ^{೨}; ೩೨ಯ^{೨}ವ^{೨}ಸ^{೪}ಕ್ಷ^{೨}. ೮. ೫ಅಪಕ್ಷ^{೨}; ೬೦ಅ^{೪}ಪ^{೪}ಕ್ಷ^{೨}. ೯. ೩ಬಯ; ೫೪ವ^{೨}ಬ^{೨}ಯ^{೨}ರ^{೨}. ೧೦. ಅ^{೨}ಪಮ; ೨೧೦ಅ^{೨}ಕ^{೨}ಪ^{೪}ಮ^{೪}. ೧೧. ೨ಬ^{೨}ಮ^{೨}; ೧೪೪ಕ^{೨}ಗ^{೨}ಪ^{೪}ಬ^{೪}ಮ^{೨}. ೧೨. ೨ಯ; ೪೭ಅ^{೪}ಯ^{೪}ರ^{೨}ಲವ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮. **ಪು. ೮೩, ೮೪.**

೧. ಪ^{೨} − ಪಸ + ಸ^{೨}; (ಪ + ಸ)(ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಸ^{೨} + ಸ^{೪}). ೨. ಯ + ೪; (ಯ + ೧)(ಯ + ೪)^{೨}. ೩. ರ − ೩; (ರ − ೧)(ರ − ೩)^{೨}. ೪. ನ^{೨} + ೪ನ + ೧೬; (ನ − ೪)(ನ^{೪} + ೧೬ನ^{೨} + ೨೫೬). ೫. ೩(ಮ − ೩); ೩(ಮ + ೩)(ಮ^{೨} − ೨೭). ೬. ಪ^{೨} − ಸ^{೨}; (ಪ^{೨} + ಸ^{೨})^{೨}(ಪ^{೨} − ಸ^{೨})^{೨}. ೭. (ನ − ೫)(ನ^{೨} + ೨೫); ನ^{೪} − ೬೨೫. ೮. (ಕ್ಷ + ೨)(ಕ್ಷ + ೩); (ಕ್ಷ + ೧)(ಕ್ಷ + ೨)(ಕ್ಷ + ೩)(ಕ್ಷ + ೪). ೯. ೨(ಕ್ಷ − ೧)(ಕ್ಷ − ೫); ೪ಕ್ಷ(ಕ್ಷ^{೨} − ೧)(ಕ್ಷ − ೫). ೧೦. ೪(ಯ + ಕ್ಷ)^{೨}; ೮ಯ(ಯ + ಕ್ಷ^{೨}). ೧೧. ೫ಯ + ೩ಕ್ಷ + ೭; (೫ಯ + ೩ಕ್ಷ + ೭)(೫ಯ + ೩ಕ್ಷ + ೧)(೫ಯ − ೩ಕ್ಷ + ೬). ೧೨. ಅ + ೨ಕ + ೫ಗ; ೨(ಅ − ೨ಕ + ೫ಗ)(ಅ^{೨} + ೮ಕ^{೨} + ೧೨೫ಗ^{೨} − ೩೦ಅಕಗ). ೧೩. ಪ − ೭; ೨ಅ^{೨}(ಪ^{೨} − ೩೪೩)(ಪ + ೩)(ಪ + ೪) ೧೪. (ಕ್ಷ + ೬)(ಕ್ಷ + ೧೧); (ಕ್ಷ + ೧)(ಕ್ಷ + ೬)(ಕ್ಷ + ೧೧)(೪ಕ್ಷ − ೩) ೧೫. ೧; (ಪ^{೪} + ೯ಪ^{೨} + ೮೧)(ಪ^{೨} + ೧೨ಪ + ೨೭). ೧೬. ೧; ೧೨(ಕ್ಷ − ೭)(ಕ್ಷ − ೩)(ಕ್ಷ + ೫). ೧೭. ೧; ೬(ಯ^{೨} − ೬೪)(ಯ^{೨} − ೬೪)(ಯ + ೧೨). ೧೮. ೬(ಕ್ಷ − ೭)(ಕ್ಷ − ೫)(ಕ್ಷ + ೨) ೧೯. (೨ಯ − ೫ಕ್ಷ)(೩ಯ + ೨ಕ್ಷ)(೪ಯ − ೭ಕ್ಷ). ೨೦. (ಅ + ೧)(ಅ − ೨)(ಅ − ೪)(ಅ − ೫)(ಅ + ೩). ೨೧. (ಪ^{೨} − ೧)(೯ಪ^{೨} − ೧)(೩ಪ + ೫)(೪ಪ − ೩).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೯. ಪು. ೮೭.

೧. (ಪ+೫)(ಪ+೧೦); (ಪ−೩)(ಪ+೫)(ಪ+೧೦). ೨. (ಮ−೭); (ಮ−೭)(ಮ−೩)(ಮ−೨)(ಮ+೪)(ಮ+೫). ೩. (ನ+೪)(ನ+೭); (ನ−೧)(ನ+೨)(ನ+೪)(ನ+೭). ೪. (ಯ−೫)(ಯ−೭); (ಯ−೭)(ಯ−೫)(೨ಯ+೧)(೩ಯ−೧). ೫. ಕ್ಷ−೨; (ಕ್ಷ−೨)(ಕ್ಷ^{2}−೯)(ಕ್ಷ^{2}−೧೬). ೬. ೨ಪ−೧; (೨ಪ−೧)(೩ಪ−೧)(೪ಪ+೧)(ಪ^{2}−೪). ೭. (ರ^{2}+೨ರ−೨); (೩ರ−೭)(೭ರ−೪)(ರ^{2}+೨ರ−೨). ೮. (೨ಯ+೩); (೨ಯ+೩)(ಯ^{2}+ಯ−೧)(೪ಯ^{2}−೩ಯ+೪). ೯. ೨ಮ+೩; (೨ಮ−೫)(೨ಮ+೧)(೨ಮ+೩)(ಮ^{2}+ಮ+೧). ೧೦. ೩ನ+೧; (೩ನ+೧)(ನ^{2}+ನ−೯)(೨ನ^{2}−ನ+೩). ೧೧. (ಕ್ಷ+೨)(೩ಕ್ಷ+೧೦); (ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೨)(೭ಕ್ಷ−೧)(೩ಕ್ಷ−೧೦). ೧೨. (ಯ−೫)(೨ಯ+೧); (ಯ−೫)(ಯ−೧)(೨ಯ+೧)(೭ಯ−೨).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦. ಪು. ೯೯, ೧೦೦.

೧. ಕ್ಷ+೫; (ಕ್ಷ+೫)(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ−೩)(ಕ್ಷ−೬)(೨ಕ್ಷ−೧). ೨. (೨ಪ−೩)(೩ಪ−೧); (೨ಪ−೩)(೨ಪ−೧)(೩ಪ−೧)(೨ಪ+೫). ೩. ೫ಪ−೭; (೫ಪ−೭)(೨ಪ^{2}−೪ಪ+೩)(೪ಪ^{2}+೩ಪ+೧). ೪. ೬ಯ^{2}+೨ಯ−೧; (ಯ−೬)(ಯ−೪)(ಯ−೩)(ಯ−೨)(೬ಯ^{2}+೨ಯ−೧). ೫. (ಕ್ಷ−೪)(ಕ್ಷ−೨)(ಕ್ಷ+೩); (ಕ್ಷ−೪)(ಕ್ಷ−೨)(ಕ್ಷ+೩)(೪ಕ್ಷ+೩)(೫ಕ್ಷ−೨). ೬. ೨೫ಕ್ಷ^{3} −೫ಕ್ಷ^{2}−೧೬ಕ್ಷ−೪. ೭. ಯ^{2}−ಯ−೨೦; ಯ^{2}−೪ಯ+೧೫; ಯ^{2}−೩ಯ−೧೦. ೮. (೯ನ^{2}+೩ನ−೨); (೯ನ^{2}−೯ನ+೨); ೯ನ^{2}−೧. ೯. ೫೦ನ^{3}+೭೫ನ^{2}−೮ನ−೧೨; ೨೦ನ^{3}−೮ನ^{2}−೪೫ನ+೧೮. ೧೦. ೮ಯ^{3} − ೪೨ಯ^{2}+೪೯ಯ+೧೫; ೮ಯ^{3} − ೬ಯ^{2} −೫೯ಯ − ೧೫; ೩೨ಯ^{3}−೮೦ಯ^{2}−೨ಯ+೫. ೧೧. ೨, ೨೮. ೧೨. −೧೬, ೧; ೮, −೬.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧. ಪು. ೧೦೩, ೧೦೪.

೧. (ಯ+೨ಕ್ಷ)/(ಯ+೪ಕ್ಷ). ೨. ಅ/ಪ. ೩. (ಅ+ಕ)/೪. ೪. (ಅ−ಮ)/(ಅ^{2}−ಅಮ+ಮ^{2}).

೫. $\frac{೨ಪ - ೭ಮ}{೩ಪ + ಮ}$. ೬. $\frac{೮ಅ + ೫ಕ}{೭(ಅ - ೨ಕ)}$. ೭. $\frac{೨ಯ - ೭}{೪ಯ - ೧}$.

೮. $\frac{೨(೫ಕ್ಷ - ೨)}{೨ಕ್ಷ + ೫}$. ೯. $\frac{ಯ + ೨}{ಯ + ೬}$. ೧೦. $\frac{ಪ - ೧}{ಪ + ೨}$

೧೧. $\frac{ಯ + ೨}{೪ಯ^೨ - ೩ಯ + ೧}$. ೧೨. $\frac{ನ + ೩}{ನ + ೫}$. ೧೩. $\frac{ಮ + ೪}{ಮ^೨ + ೨ಮ - ೧೫}$

೧೪. $\frac{ಮ^೨ + ೨ಮ - ೮}{ಮ^೨ - ೭ಮ - ೮}$. ೧೫. $\frac{ಯ - ೮}{ಯ + ೮}$. ೧೬. $\frac{ಪ^೨ + ೧೬ಮ^೨}{೭ಪ^೨ + ಮ^೨}$

೧೭. $\frac{೪(ಯ^೨ + ೪ಯ + ೩)}{೭ಯ^೨ + ೮ಯ - ೫}$. ೧೮. $\frac{ಅ^೨ - ೪ಕ^೨}{ಅ^೨ + ೪ಕ^೨}$.

೧೯. $\frac{೫ಅ + ೩ಕ + ೨ಗ}{೫ಅ + ೩ಕ - ೨ಗ}$. ೨೦. $\frac{(ಅ - ೧)(ಅ - ೩)}{(ಅ + ೧)(ಅ + ೩)}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨. **ಪು. ೧೦೮—೧೧೦.**

೧. $\frac{ಅ^೨ + ಅಮ + ಮ^೨}{ಅ^೨ - ಅಮ + ಮ^೨}$. ೨. $\frac{೫}{೮}$. ೩. $\frac{೭ಕ್ಷ + ೩}{೩ಕ್ಷ + ೨}$.

೪. ೧. ೫. $\frac{೪(ಅ^೨ + ಅನ + ನ^೨)}{೧೫}$. ೬. ೧. ೭. $\frac{೪(೫ಯ - ೭)}{೩(ಯ - ೩)}$.

೮. $\frac{೭(ಯ + ಕ್ಷ)}{೩ಯ - ಕ್ಷ}$. ೯. $\frac{೫ಅ - ಕ}{೭ಅ - ಕ}$. ೧೦. $\frac{(ಮ - ೨)(ಮ + ೪)}{(ಮ + ೫)(ಮ + ೭)}$.

೧೧. $\frac{ನ^೨ - ೧}{ನ^೨ - ೯}$. ೧೨. $\frac{ಅ + ೧}{ಅ + ೭}$. ೧೩. $\frac{೨ಪ + ಮ}{೪ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨}$.

೧೪. ೧. ೧೫. ೩ಯ — ೧. ೧೬. $\frac{೧೬ಪ^೨ - ೪ಪ + ೧}{ಪ^೨ - ೫ಪ + ೨೫}$. ೧೭. $\frac{೨}{೩}$.

೧೮. $\frac{ರ^೨ + ರಲ + ಲ^೨}{೪}$. ೧೯. ೨. ೨೦. $\frac{ಯ + ಪ}{ಯ^೨ - ಮಯ + ಮ^೨}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩. **ಪು. ೧೧೩, ೧೧೪.**

ಮುದ್ರಣದ ಅನುಕೂಲತೆಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು **ಸಾಧಾರಣ ಭೇದವನ್ನು** ...ಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

೧. $ಅ^{೨} — ಕ^{೨}$; ೨(ಅ + ಕ),೨(ಅ — ಕ). ೨. (೨ಅ + ೩ಕ) (೨ಅ — ೩ಕ); ೫(೩ಅ — ೨ಕ),೭(೨ಅ + ೩ಕ). ೩. ೪(೪ಅ — ಗ) (೨ಅ + ೩ಗ); ೭(೨ಅ + ೩ಗ),೩(೪ಅ — ಗ). ೪. ೧೨(ಯ + ೩ರ);೮ಪ,೯ಪ, ೫. (ಯ — ೨)(ಯ — ೩)(ಯ — ೪);೨(ಯ — ೩),೩(ಯ — ೨). ೬. (ರ-೫) (ರ + ೭)(೨ರ + ೧);ಅ(ರ + ೭),೨ಅ(ರ-೫). ೭. (೨ಯ-೩ರ)(೩ಯ + ೪ರ) (೫ಯ — ೨ರ); ೫ಪ(೫ಯ — ೨ರ), ೮ಪ(೨ಯ — ೩ರ). ೮. (ಅ + ೪) (ಅ + ೨)(ಅ — ೫);ಅ — ೫,೯(ಅ + ೨),೨(ಅ + ೪). ೯. $(ಅ^{೨} — ಕ^{೨})^{೨}$; $ಅ^{೨} — ಕ^{೨},(ಅ + ಕ)^{೨},(ಅ — ಕ)^{೨}$. ೧೦, $ಯ^{೬}-ರ^{೬}; ಯ^{೩} + ರ^{೩}, ಯ^{೩}-ರ^{೩}, ಯ^{೪} + ಯ^{೨}ರ^{೨} + ರ^{೪}, ಯ^{೨} — ರ^{೨}$. ೧೧. (ಯ — ರ)(ರ — ಲ) (ಲ — ಯ); ಲ - ಯ, ೨(ಯ — ರ), ೩(ರ — ಲ). ೧೨. $(೪ಯ^{೨} — ೨೫ರ^{೨})(೪೯ಯ^{೨} — ೧೬ರ^{೨})$; $೩ಅ(೪೯ಯ^{೨} — ೧೬ರ^{೨}), ೨ಅ(೪ಯ^{೨} - ೨೫ರ^{೨})$, ಅ(೨ಯ + ೫ರ)೭ಯ - ೪ರ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪. ಪು. ೧೨೨—೧೨೪.

೧. $\frac{೮ಮ}{ಬ^{೨} \quad ಮ^{೨}}$. ೨. $\frac{೪ಅಕ}{ಅ^{೨} — ಕ^{೨}}$. ೩. ಅ.

೪. $\frac{ಅ^{೨} + ಕ^{೨} — ೨ಅಕ}{ಅಕ}$. ೫. $\frac{ಅ^{೪} + ಕ^{೪} + ಅ^{೨}ಕ^{೨}}{ಅ^{೨}ಕ^{೨}}$.

೬. $\frac{ಅಪ}{ಪ^{೨} — ಮ^{೨}}$. ೭. $\frac{೨ಕಮ}{(ಪ — ಮ)^{೨}(ಪ + ಮ)}$. ೮ $\frac{೪ದನ}{ದ^{೩} — ನ^{೩}}$

೯. $\frac{ಯ^{೨} + ೨೫}{ಯ^{೩} — ೧೨೫}$. ೧೦. $\frac{೨ಪ^{೩}}{ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}}$

೧೧. $\frac{೨ಅ^{೨} — ೧೨ಅ + ೧೯}{(ಅ — ೨)(ಅ — ೩)}$. ೧೨. $\frac{೩}{(ಅ + ೩)(ಅ + ೪)(ಅ + ೫)}$

೧೩. $\frac{೨(೯ಯ^{೨} + ೧೬)}{೮೧ಯ^{೪} + ೧೪೪ಯ^{೨} + ೨೫೬}$. ೧೪. $\frac{ರ^{೨} + ಲ^{೨}}{ರ^{೨} — ಲ^{೨}}$.

೧೫. $\frac{೧೦ಮ}{(೨ಪ + ೫ಮ)^{೨}}$. ೧೬. $\frac{೨(೩ನ^{೨} + ೧)}{(ನ^{೨} — ೧)(ನ + ೨)(ನ + ೩)}$.

೧೭. $\frac{ಪಮ}{(ಪ-ಮ)(ಪ^೪-ಪ^೨ಮ^೨+ಮ^೨)}$. ೧೮. $\frac{೫ಅ}{(ಅ+೫)^೪}$

೧೯. $\frac{೭ಪಮ-೩ಪ+೬ಮ}{ಪ^೪-೮ಮ^೪+೧೮ಪಮ+೨೭}$ ೨೦. $\frac{ಪ^೨}{ಪ^೨-೧೬}$.

೨೧. $\frac{೩೬}{(ನ+೩)^೨}$. ೨೨. $\frac{ಪಮ(ಪ^೨+ಮ^೨)}{ಪ^೬-ಮ^೬}$. ೨೩. $\frac{೧}{೨ಅ-೫}$.

೨೪. $\frac{೧}{ಮ^೨-೩ಮ+೯}$. ೨೫. $\frac{೪ಪ^೨+೭೫ಮ^೨}{(೪ಪ^೨-೨೫ಮ^೨)^೨}$.

೨೬. $\frac{೨}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}$. ೨೭. ೦. ೮. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೫. ಪು ೧೨೬, ೧೨೭.

೧. $\frac{೪ಪ^೨}{ಪ^೪-೧೬}$. ೨. $\frac{೧೦ಅ}{ಪ^೪-೨೫}$. ೩. $\frac{೫}{೧೬ಮ^೪-೧}$.

೪. $\frac{೮ಅ^೨ಕ^೨}{ಅ^೪-ಕ^೪}$. ೫. $\frac{ಪ+೨}{ಪ+೩}$. ೬. $\frac{೩ನ-೨}{ನ(ನ-೨)}$. ೭. $\frac{ಮ+೨}{(ಮ-೨)^೭}$

೮. $\frac{೬ಪಮ^೪}{ಪ^೬-ಮ^೬}$. ೯. $\frac{೪ಮ^೪(೨ನ^೨+ಮ^೨)}{ನ^೬-ಮ^೬}$.

೧೦. $\frac{೧೩೦}{(ಯ^೨+೧)(ಯ^೨-೨೫)}$. ೧೧. $\frac{೧}{(ಅ+೧)(ಅ+೨)(ಅ+೩)}$.

೧೨. $\frac{೪}{(೩ಪ+೧)(೩ಪ+೩)(೩ಪ+೫)}$. ೧೩. $\frac{೪ಕ್ಷ^೨}{ಕ್ಷ^೬-೧}$.

೧೪. $\frac{೮}{೨೫೬ಯ^೮-೧}$. ೧೫. $\frac{೮}{(ಅ+೧)(ಅ+೩)(ಅ+೫)(ಅ+೭}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೬. ಪು. ೧೨೯, ೧೩(

೧. $\frac{(ಯ+೨)}{(ಯ+೩)(ಯ+೧)}$. ೨. $\frac{೧೨೦}{(೧-ಅ^೨)(೧೬-ಅ^೨)}$.

೩. $\frac{೩ಪ}{(ಪ^೨-೧)(ಪ^೨-೪)}$. ೪. $\frac{೩೩೦}{(ನ^೨-೨೫)(ನ^೨-೩೬)}$

೫. $\frac{೭ಅಕ^೩}{ಅ^೪-ಕ^೪}$. ೬. $\frac{೧೨}{(ಕ್ಷ^೨-೧)(ಕ್ಷ^೨-೪)}$. ೭. $\frac{೭}{(ಕ್ಷ^೨-೧)(ಕ್ಷ^೨-೪)}$

೮. $\frac{೨(ನ+ಪ)(ನಪ-ಮ^೨)}{(ನ^೨-ಮ^೨)(ಪ^೨-ಮ^೨)}$. ೯. $\frac{೭ಕಗ(ಕ^೨-ಗ^೨)}{(ಅ^೨-ಕ^೨)(ಅ^೨-ಗ^೨)}$

೧೦. $\frac{೬೦}{(ಯ-೧)(ಯ-೨)(ಯ+೩)(ಯ+೪)}$.

೧೧. $\frac{೫ಕ್ಷ+೨೧}{ಕ್ಷ^೨+೯ಕ್ಷ+೨೦}$. ೧೨. $\frac{೨}{ಅ-೫ಕ}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭ ಪು. ೧೩೬, ೧೩೭.

೧. $\frac{೧}{ಪ-ಮ}$. ೨. $\frac{೭}{೫ಯ-೩}$. ೩. $\frac{೧೦}{ರ-೩}$. ೪. $\frac{೪}{ಪ-ಮ}$.

೫. $\frac{೧}{(ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ-೪)}$. ೬. $\frac{೨ಮ}{ಪ^೨-ಮ^೨}$.

೭. $\frac{೫ಕ-೩}{(ಕ+೪)(೨ಕ-೧)(೩ಕ-೨)}$. ೮. $\frac{೧}{ನ-೨}$. ೯. $\frac{೧೭ಯ}{೧-೧೬ಯ^೨}$.

೧೦. $\frac{೯೫}{(ಕ್ಷ^೨-೪)(ಕ್ಷ^೨-೧೬)}$. ೧೧. $\frac{ಪ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)}$.

೧೨. ೦. ೧೩, ೧. ೧೪. ೦. ೧೫. ೦. ೧೬. ೦. ೧೭. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮. ಪು. ೧೪೧—೧೪೪.

೧. $\frac{೧}{ಅ}$ ೨. ಯ—ರ. ೩. $\frac{ಪ+೨}{ಪ+೩}$. ೪. ಯ+ವ.

೫. $\frac{ರ^೨+ರಲ+ಲ^೨}{ರ+ಲ}$. ೬. $\frac{ಪ-೨}{ಪ-೪}$. ೭. ಅ—೪. ೮. $\frac{ರ^೩-ಲ^೩}{ರ(ರ+ಲ)}$. ೯. $\frac{ಯ+ರ}{ಯ-ರ}$. ೧೦. $ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨-ಪಬ-ಬಮ-ಮಪ$ ೧೧. $\frac{ಯ+೩}{ಯ+೫}$. ೧೨. $\frac{ಪ-೩}{ಪ-೫}$. ೧೩. $\frac{ಯ-೧}{ಯ+೭}$.

೧೪. $\frac{ಕ}{ಅ^೨+ಕ^೨}$. ೧೫. $\frac{೧-೨ಬಯ}{೪(ಕಯ-೧)}$. ೧೬. $\frac{೨ಅ}{೧-ಅ^೨}$.

೧೭. ೨. ೧೮. $-\frac{೭}{ಯ}$. ೧೯. ೧. ೨೦. $\frac{೨ಸ^೩ \ldots ೧೦ಸಯ+೪ಯ^೨}{ಸಯ(೭ಸ+೪ಯ)}$.

೨೧. ೧. ೨೨. $\frac{(ಸ-೧)(ಸ-೨)}{ಸ+೧}$. ೨೩. ೧. ೨೪. ಸಯ.

೨೫. $ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨-ಪಬ-ಬಮ-ಮಪ$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭೯. ಪು. ೧೪೬.

೧. $\frac{ಅ}{೨}$. ೨. $\frac{೧೦}{೩-ಸ}$. ೩. ೧. ೪. $೭-ಸ$. ೫. $\frac{೭-೩ಯ}{೭೧-೮ಯ}$.

೬. $\frac{೧-ಯ}{೨-ಯ}$. ೭. $\frac{ಅ^೨}{ಅ+೧}$. ೮. $\frac{(ಯ-೨)^೨}{ಯ-೧}$. ೯. $\frac{ಪ+ಮ}{ಪ}$.

೧೦. $೪ಸ-೩$. ೧೧. $\frac{ಸ}{ಸ+ಮ}$. ೧೨. $\frac{೧೦}{೯-ಅ}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦. ಪು. ೧೫೩.

೧. $\frac{೧}{ಬಕ}+\frac{೧}{ಅಕ}+\frac{೧}{ಅಬ}$. ೨. $\frac{ಕ^೨}{ಗಘ}+\frac{ಗ^೨}{ಕಘ}+\frac{ಘ^೨}{ಕಗ}$.

೩. $\frac{೫ಯ}{ರ}-೭+\frac{ರ}{ಯ}$. ೪. $\frac{೧}{ರ^೪ಲ^೪}+\frac{೧}{ಯ^೪ಲ^೪}+$

$\frac{೧}{ಯ^೪ರ^೪}-\frac{೩}{ಯ^೨ರ^೨ಲ^೨}$. ೫. $\frac{೧}{ಕ್ಷ-೪}+\frac{೧}{ಕ್ಷ-೩}$.

೬. $\frac{೧}{೨ರ-೧}+\frac{೧}{೫ರ-೩}$. ೭. $\frac{೧}{ಯ-೧}+\frac{೧}{ಯ-೨}$. ೮. $\frac{೧}{ಯ+೧}+$

$\frac{೧}{೨ಯ+೫}$. ೯. $\frac{೧}{ಸ-೨}+\frac{೧}{ಸ+೭}$. ೧೦. $\frac{೧}{೫ಪ-೩}+\frac{೧}{೫ಪ+೩}$.

೧೧. $\frac{೧}{೪-ಪ}+\frac{೧}{೪+ಪ}$. ೧೨. $\frac{೧}{ಅ-೩}-\frac{೧}{ಅ+೩}$

೧೩. $\frac{೧}{ಯ+೪} - \frac{೧}{ಯ+೮}$. ೧೪. $\frac{ಪ+ಮ}{ಪ-ಮ}+\frac{ಪ-ಮ}{ಪ+ಮ}$.

೧೫. $\frac{೧}{ರ^೨-ಸ^೨}$. $-\frac{೧}{ರ^೨+ಸ^೨}$ ೧೬. $\frac{೧}{ಪ^೪-ಮ^೪}+\frac{೧}{ಪ^೪+ಮ^೪}$

೧೭. $\frac{ಯ+೩}{ಯ-೩}+\frac{ಯ-೩}{ಯ+೩}$. ೧೮. $\frac{೧}{ಯ^೨-ಯರ+ರ^೨}+\frac{೧}{ಯ^೨+ಯರ+ರ^೨}$. ೧೯. $೧-ಅ+ಅ^೨-\frac{ಅ^೩}{೧+ಅ}$. ೨೦. $೧+ಅ^೨+ಅ^೪+\frac{ಅ^೬}{೧-ಅ^೨}$. ೨೧. $೧+೨ಅ+೨ಅ^೨+\frac{೨ಅ^೩}{೧-ಅ}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦. ಪು. ೧೫೫, ೧೫೬.

೧. ೨(ಯ—೪). ೨. ೩(ಯ+೧). ೩. ಅ+ಕ. ೪. $ಪ^೨-ಪಮ+ಮ^೨$. ೫. $ನ^೨-ನಮ+ಮ^೨$. ೬. $ಯ^೨+ಯವ+ವ^೨$. ೭. ಪ—೫.

೮. $\frac{ಪ^೪}{(ಪ-ಮ)^೪}$ ೯. $\frac{೨(೨ರ-೫)}{(ರ-೯)(ರ-೨)(ರ-೩)}$.

೧೦. $\frac{೯(೩ಯ-೨)}{(ಯ-೪)(ಯ-೨)(ಯ+೬)}$.

೧೧. $\frac{೩ಯ-೭}{(ಯ-೩)(ಯ-೨)(ಯ-೧)}$. ೧೨. $\frac{೨ಪ(೨ಪ+ಮ)}{(ಪ^೨-ಮ^೨)(ಪ+ಮ)}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨. ಪು ೧೬೪—೧೬೬.

೧. ೧೮,೪. ೨. ೭$\frac{೧}{೫}$,—೯$\frac{೩}{೫}$. ೩. ೫,೩. ೪. ೩,೨. ೫. ೨$\frac{೨}{೩}$,೧$\frac{೧}{೮}$.
೬. ೪$\frac{೧}{೭}$,೧$\frac{೧}{೭}$. ೭. ೫,೩. ೮. $\frac{೧}{೮}$,—$\frac{೨}{೭}$. ೯. ೧,—೨. ೧೦. ೩೭$\frac{೧}{೭}$,೫$\frac{೫}{೮}$.
೧೧. ೫,—೪. ೧೨. ೨,೩. ೧೩. ೨,೪. ೧೪. ೨,೧. ೧೫. ೪,೨
೧೬. ೪,೬. ೧೭. ೨,—೨. ೧೮. ೫,೨$\frac{೧}{೭}$. ೧೯. ೧,೨. ೨೦. ೨,೧.
೨೧. ೩,—೨. ೨೨. —೧,೨. ೨೩. ೩,೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩ ಪು. ೧೭೦, ೧೭೧.

೧. ೩,೩. . ೫,—೧$\frac{೧}{೭}$. ೩. ೨$\frac{೫}{೮}$,೮$\frac{೨}{೫}$. ೪. $\frac{೧}{೧೪}$,೨. ೫. $\frac{೧}{೭}$,$\frac{೧}{೨}$.
೬. $\frac{೧}{೫}$,—$\frac{೧}{೯}$. ೭. ೨,೩. ೮. ೨,—೩. ೯. $\frac{೧}{೨}$,—$\frac{೧}{೫}$. ೧೦. ೪$\frac{೧}{೭}$,೩

೧೧. ೨,—೬. ೧೨. ೨,೩. ೧೩. ೪,೨. ೧೪. ೪,೧⅔. ೧೫. ೫,೭.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೪. ಪು. ೧೭೩—೧೭೫.

೧. ೨,—೧. ೨. ೮,—೨. ೩. ೬,೪. ೪. ೨,೧. ೫. ೨,—೩. ೬. ೪,೨. ೭. ೨,೧. ೮. ೧'೨. ೯.—೧,—೨. ೧೦. ೪,೧. ೧೧. ೨,೨. ೧೨. ೧,—೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೫. ಪು ೧೭೯—೧೮೭.

೧. ೪೨. ೨. ೫೬೦೦೦ ರೂ., ೪೦೦೦೦ ರೂ., ೧೬೦೦೦ ರೂ. ೩. ೧೩೦. ೮೦; ೩॥ ರೂ. ೩'॥ ರೂ. ೪. ೧೨೦೦ ರೂ., ೮೦೦ ರೂ., ೫. ೮ವ್ಯೈ. ೨ವ್ಯೈ., ೬. ೭ ರೂ., ೫ ರೂ. ೭. ೩೨೪. ೮. ೧೦೫ ರೂ., ೧೩೦ ಸೇರು ೯. ೮೦ ಫ್ರೊ, ೪೦ ಫ್ರೊ. ೧೦. ೪೦,೪೪. ೧೨. ೨೧ ರೂ; ೪ರೂ. ೧೩. ೪೮ ೫೬; ೩೮.,೩॥೮. ೧೪. ೬೦ವ, ೨೫ವ. ೧೫. ೩. ೧೬. ೨೧ವ್ಯೈ, ೪ವ್ಯೈ, ೩⅔ವ್ಯೈ ೪⅔ವ್ಯೈ. ೧೭. ೧೬೦ ರೂ., ೨೪೦ರೂ. ೧೮. ೫೧,೧೫. ೧೯. ೨೦ ೧೨೦ರೂ. ೨೦ ೧೪,೬. ೨೧. ೧೫ಸೇರು. ೧೪ಸೇರು. ೨೨. ೫೯. ೨೩. ೯೦ರೂ,೪೫. ೨೪. ⅔೨೬. ೨೫. ೧೨ರ,೧೬ರ. ೨೬. ೨೪. ೨೭. ಕೃಷ್ಣ—ರಾಯರು, ೭೫ರೂ., ರಾಮರಾಯರು, ೧೨೦ರೂ. ೨೮. ೧೧ ವ್ಯೈ. ೨೯. ೬ವ್ಯೈ. ೩೦. ೮೬೦. ೩೧. ೧೩೮೨೪; ೯೨೧೬. ೩೨. ⅔. ೩೩. ೫೪. ೩೪. ೬೩.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬. ಪು. ೨೦೧.

೩. ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೪. ಕೋಟ್ಯಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೫. ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮. ಪು. ೨೦೬.

೧. ಯ=೩ಕ್ಷ+೪. ೨. ಯ=೮ಕ್ಷ—೭. ೩. ೨ಕ್ಷ—ಯ+೮=೦. ೪. ೩ಕ್ಷ—೪ಯ=೧೬. ೫. ಕ್ಷ+೩ಯ=೧೫. ೬. ೪ಕ್ಷ—೩ಯ+೫=೦. ೭. ೨ಕ್ಷ—೩ಯ=೧೫. ೮. ೪ಕ್ಷ—೫ಯ=೪. ೯. ಕ್ಷ—೪ಯ+೩=೦. ೧೦. ಕ್ಷ+೨ಯ=೩.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯. ಪು. ೨೨೪, ೨೨೫.

೧. ೩,೩, ೨ ೧,—೧. ೩. ೨,೧. ೪. ⅔,೧⅔. ೫. ೪,—೧. ೬. ೨,೧. ೭. ೦,—೩. ೮ ೨,೧೧. ೯. ೧,೬. ೧೦. ೬,೬. ೧೧. ೨,೪. ೧೨. ೧,—೧.

೧೩. ೪. ೧೪. —೨/೩. ೧೫. ೩೨. ೧೬. —೩. ೧೭. ೨. ೧೮. ೩.
೧೯. —೧/೩. ೨೦. —೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦. ಪು. ೨೩೪—೨೩೮.

೧. ೪೫; ೧೫; ೫; ೧೦. ೨. ೧೨ಶೇರು; ೨೫ಶೇರು. ೩. ೮॥ ಗಂಟೆಗೆ ೧೦॥ ಮೈಲಿನ ಮೇಲೆ, ೭॥ ಮೈ.; ೬॥. ೪. ೧೦॥ ಗಂಟೆಗೆ ೩೬ ಮೈಲಿನ ಮೇಲೆ. ೮ಮೈ.. ೯॥. ೫. ೮ಮೈ; ೪ಮೈ; ೧೦॥. ೬. ೫೨/೩ ೩೦., ೧೧೩೦, ೨೭೨/೩ ೩೦.; ೫೧/೨ ೩೦., ೭೩೦., ೧೦೨/೩ ೩೦, ೭. ೨೦ಸೆಂ; ೩೦ಸೆಂ, ೬೦ ಸೆಂ. ೫೦ಫ, ೧೦೪ಫ) ೧೨೨. ಫ. ೮. ೩೨. ೯. ೧೨. ೧೦. ೫. ೧೧. ೩೫; ೫೫ ೧೨. ೮೦೦ರೂ, ೭೦೦೦. ೧೩. ೮೨೫ ರೂ.; ೫೦: ೨೦ ೧೪. ೧೪೦೦ರೂ.; ೧೨. ೧೫. ೪೨೦ ರೂ.; ೧೪ವ. ೧೬. ೭೦ರ.; ೪೦ರ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು. ಪು. ೨೩೯.

೧. ೨೪; (ಯ—೧)(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)(ಯ—೪). ೨. ೬ಯ^{೪}—ಯ^{೩} — ೩೮ಯ^{೨}+೭೯ಯ—೩೦. ೩. ೧/೩ (ಕ+ಗ+ಘ); (ಪ^{೨}+ಪಮ+ಮ^{೨})/(ಪ+ಮ). ೪. ೩; ೧೨; ೧೫. ೫. ೬ರೂ. ೧೧೮. ೯ಪ್ಟೆ ೭. ೨, ೩. ೮. ೩/೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ ನೆಯದು. ಪು. ೨೪೦.

೧. ೧೧; ೧೪. ೨. ೭; (ಯ—೫)(ಯ—೧)(೮ಯ^{೨}+೭ಯ+೭). ೩. ೧; ೧/೩(ಯ—೧) ೪. ಯ+೩; (ಯ+೩)(೨ಯ+೧)(೪ಯ+೩). (೮ಯ—೫)(೧೬ಯ—೧೫). ೫. —೧/೩; ೮೦, —೧೧೦. ೬. (೨ಯ+೨ರ—೩)(೩ಯ+೩ರ+೨); ೬(ಯ+೩)(ಯ—೫)(೧—ಯ), ೬ಪ(ಪ—೨)(ಪ—೧)(ಪ÷೩), ೭. ೯ಹೊ. ೨೦ ಮಿ ; ೧೩೩/೪ ಮೈ. ೮. ೨೭.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ನೆಯದು. ಪು. ೨೪೧.

೧. (ಯ—೧)(ಯ+೧)(ಯ—೨)(ಯ+೨)(ಯ+೩);
(ಯ^{೨}+ಯ+೧)(ಯ^{೨}+ಯ+೪) ; (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).;
೨. ೧೫; ೯. ೩. ೧; (ಪ^{೪}—ಬ^{೪}) /ಪ^{೨}ಬ^{೨}. ೪. ೫;—೧/೩,—೧/೩. ೫. ೫;—೧೮. ೬. ೫೫೪೪೮೫. ೩೦; ೧೪೩೦, ೭. ೯ಹೊ, ೨೨೧/೩ಮಿ.;
೨೨ ದಿಂದ ೧೬೨ ನೆ... ಗಳ ನ... ೮೯ ೫೫೧೧೦

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ನೆಯದು. ಪ್ರ. ೨೪೩.

೧. (ಪ−ಬ)(ಬ−ಮ)(ಮ+ಪ); (ಪ−ಬ+ಮ)(ಪ+ಬ−ಮ−೧); $\left(\frac{ಯ}{ಅ} + ೧ + \frac{ಅ}{ಯ}\right)\left(\frac{ಯ}{ಅ} - ೧\ \frac{ಅ}{ಯ}\right)$. ೨. −೨; ೮.

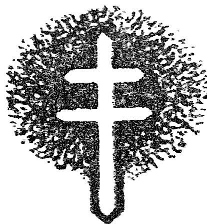
೩. $\frac{(ಯ-೨)(೩-ಯ)}{ಯ}$; $\frac{೨}{(ಪ-ಮ)}$ ೪. $\frac{೧೪}{೧೦}$; ೨, ೧. ೫. ೮೧$\frac{೧}{೮೧}$. ೬. ೪೯; ೯೪. ೭. ೧,೧; ೪ಕ್ಷ+ಯ=೫, ಕ್ಷ+೪ಯ=೫. ೮. ೩೦೦ ಸ್ಟೈ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ನೆಯದು. ಪ್ರ. ೨೪೪.

೨. (ಯ−೧)(೩ಯ−೧)(೫ಯ−೪) ; $\left(೨ಯ - ೧ + \frac{೧}{೩ಯ}\right)$ $\left(೪ಯ^೨ + ೨ಯ + \frac{೧}{೩} + \frac{೧}{೩ಯ} + \frac{೧}{೯ಯ^೨}\right)$; ಯರ(ರ−ಯ)(ರ+ಯ)($ರ^೨$+$ಯ^೨$). ೩. ೫;೫,೨. ೪. ೨೧/(ಯ−೫)($ಯ^೨$−೧೬); −೨ಬಮ/ಪ. ೫. $ಯ^೨$−ಅಯ+ಗ. ೬. ೭೫ರೂ.; ೧೨೫ರೂ. ೧೦೦ ರೂ. ೭. ೧೧೬೦೦ರೂ.; ೩೪೦೦ರೂ. ೮. ೮, ೧೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ನೆಯದು. ಪ್ರ. ೨೪೬.

೧. (ಯ−೮)/(ಯ+೨). ೨. ಯ−೨ಅ; (ಯ−೨ಅ)(ಯ+ಅ)($ಯ^೨$+$ಅ^೨$)(೩$ಯ^೨$−ಅಯ+$ಅ^೨$). ೩. (ಯ−೨)(ಯ+೧)(೪ಯ−೭); (೨ಯ−ರ−೩ಲ)(೪$ಯ^೨$+$ರ^೨$+೯$ಲ^೨$+೨ಯರ−೩ರಲ+೬ಲಯ) : (ಯ+ರ−೫)(ಯ+ರ+೮) . ೪. ೫; −೨; $\frac{೧}{೩}$, $\frac{೧}{೨}$. ೬. ಪ+ಬ+ಮ−೩ಯ. ೭. ೮ಪ. ೮. ೮ಸ್ಟೈ.



ಕ್ಷಯರೋಗ ನಿವಾರಣೆಗೆ
ನೆರವಾಗಿ

EXPLICIT ALGEBRA, Part III (Kannada)
By P. S. Katti and V. P. Khanolkar
Price Rs. 2-4-0.